

دروس مفصلة
وتقارير عملية
بمنظور المقاربة بالخطوات

الحلّيات

الرياضيات

للشعب:

علوم تجريبية
رياضيات
تقني رياضي

3AS
ثانوي

تأليف: عمر شبين
جمال بوغاف



وفق المنهاج الوزاري الجديد

دروس مفصلة
وتمارين محلولة بمنظور
المقاربة بالكفاءات

تأليف الأستاذ: عمر شيبين
الأستاذ: جمال بوعاف

الحديث في الرياضيات

لطلاب السنة 3 ثانوي

شعبة :

- ✓ علوم تجريبية .
- ✓ رياضيات .
- ✓ تقني رياضي .

وفق المنهاج الوزاري الجديد

دار النشر
الجزائر

1 - نهاية متتالية :

تعريف 1 :

نقول عن متتالية (U_n) أنها تتناهي نحو $+\infty$ إذا كان من أجل كل عدد A فإن المجال

$[A ; +\infty[$ يشمل كل حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة. ونقول أيضا أن المتتالية متباعدة

$$\text{نحو } +\infty \text{ ونكتب : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

مثال

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بعدها العام $U_n = n^2$. ما هي نهايتها ؟

$$\text{الحل } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

تعريف 2 :

نقول عن المتتالية (U_n) أنها محدودة من الأعلى إذا فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_n \leq M \text{ ، حيث } M \text{ عدد حقيقي .}$$

خاصية 1 :

كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تتناهي نحو $+\infty$.

تعريف 3 :

نقول عن متتالية (U_n) أنها تتناهي نحو عدد λ إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على

حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة. ونقول أن المتتالية متقاربة ونكتب :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lambda$$

$$\text{مثال المتتالية } (U_n) \text{ المعرفة بعدها العام } U_n = \frac{3}{n} \text{ متقاربة نحو } 0 \text{ لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

خاصية 2 :

كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي A تتقارب نحو نهاية λ أصغر من أو

تساوي A .

تساوي B .

3 - نهاية دالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف 4 :

لكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; +\infty[$.

نقول أن f تتناهي نحو $+\infty$ عندما يتناهي x نحو $+\infty$ إذا فقط إذا كان من أجل كل عدد A فإن

المجال $[A ; +\infty[$ يحتوي على كل قيم الدالة f من أجل x كبيرة جدا. ونكتب :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال :

الدالة f حيث : $f(x) = x^2$ تتناهي نحو $+\infty$ من أجل x يتناهي نحو $+\infty$.

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

تعريف 5 :

$$\bullet \text{ نقول أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ إذا فقط إذا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [-f(x)] = +\infty$$

$$\bullet \text{ نقول أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = -\infty \text{ إذا فقط إذا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-U_n) = +\infty$$

تعريف 6 :

لكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; +\infty[$. نقول أن f تتناهي نحو λ عندما

يتناهي x نحو $+\infty$ إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل x كبيرة جدا.

ونكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$. ونقول أن التمثيل البياني (C_f) للدالة f يقبل عند $+\infty$

مستقيم مقارب أفقي (Δ) معادلته : $y = \lambda$.

تعريف 7 :

لكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; +\infty[$. إذا كانت :

$$\begin{cases} f(x) = a x + b + g(x) \\ a \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{cases}$$

نقول أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مانلا معادلته : $y = ax + b$

3 - نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0
تعريف 8 :

لتكن f دالة معرفة بجوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0). نقول أن f تنتهي نحو $+\infty$ عندما ينتهي x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال $[A ; +\infty[$ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ونقول أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا

معادلته : $x = x_0$
تعريف 9 :

f دالة معرفة على مجال مفتوح و يشمل x_0 .

نقول أن f تنتهي نحو λ عندما ينتهي x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$

4 - النهايات و الحصر :
خاصية 3 :

لتكن (U_n) , (V_n) , (W_n) ثلاث متتاليات تحقق ، ابتداء من رتبة معينة :

$$U_n \leq V_n \leq W_n$$

إذا كانت (U_n) و (W_n) متتاليتان متقاربتان نحو λ فإن المتتالية (V_n) متقاربة نحو λ

$$\text{أي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lambda$$

خاصية 4 :

لتكن f, g, h ثلاثة دوال تحقق بجوار x_0 (وكذلك عند $+\infty$ أو $-\infty$) :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

إذا قبلت الدالتان f و h نهاية λ عندما ينتهي x نحو x_0 (أو $+\infty$ أو $-\infty$) فإن الدالة g

تقبل نهاية λ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$ (أو $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$)

خاصية 5 :

f و g دالتان تحققان على مجال $[A ; +\infty[$: $f(x) \leq g(x)$

• إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

• إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

8 - صليات على نهايات المتتاليات و الدوال :

خاصية 6 : (نهاية المجموع)

	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n)$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
2)	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
3)	ℓ	$-\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

خاصية 7 : (نهاية الجداء)

	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n \cdot V_n)$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell \cdot \ell'$
2)	$\ell (\ell > 0)$	$+\infty$	$+\infty$
3)	$\ell (\ell < 0)$	$+\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نقول أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته : $y = ax + b$

3 - نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0

تعريف 8 :

لتكن f دالة معرفة بجوار x_0 (وليس بالضرورة عند x_0). نقول أن f تنتهي نحو $+\infty$ عندما ينتهي x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال $[A ; +\infty[$ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ونقول أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته : $x = x_0$.

تعريف 9 :

f دالة معرفة على مجال مفتوح ويشمل x_0 .

نقول أن f تنتهي نحو λ عندما ينتهي x نحو x_0 إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل λ يحتوي على كل قيم الدالة من أجل قيم x القريبة من x_0 ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$.

4 - النهايات و الحصر :

خاصية 3 :

لتكن (U_n) , (V_n) , (W_n) ثلاث متتاليات تحقق ، ابتداء من رتبة معينة :

$$U_n \leq V_n \leq W_n$$

إذا كانت (U_n) و (W_n) متتاليتان متقاربتان نحو λ فإن المتتالية (V_n) متقاربة نحو λ أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lambda$.

خاصية 4 :

لتكن f, g, h ثلاثة دوال تحقق بجوار x_0 (وكذلك عند $+\infty$ أو $-\infty$) :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

إذا قبلت الدالتان f و h نهاية λ عندما ينتهي x نحو x_0 (أو $+\infty$ أو $-\infty$) فإن الدالة g

تقبل نهاية λ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$ (أو $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$).

خاصية 5 :

f و g دالتان تحققان على مجال $[A ; +\infty[$: $f(x) \leq g(x)$.

إذا قالت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

إذا قالت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

5 - نهايات على نهايات المتتاليات و الدوال :

خاصية 6 : (نهاية المجموع)

	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n)$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
2)	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
3)	ℓ	$-\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

خاصية 7 : (نهاية الجداء).

	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ أو $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + V_n)$
1)	ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
2)	$\ell (\ell > 0)$	$+\infty$	$+\infty$
3)	$\ell (\ell < 0)$	$+\infty$	$-\infty$
4)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
5)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
6)	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
7)	0	$+\infty$ أو $-\infty$	حالة عدم التعيين

التمارين

التمرين 1 :

أذكر صحة أم خطأ العبارات الآتية باستعمال الرمز $\sqrt{\quad}$ للصحة و الرمز \times للخطأ.

(1) إذا كانت : $U_n < V_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

و كانت : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$.

(2) لنكن f و g و h ثلاث دوال بحيث : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3+4}{2} = 3,5$$

(3) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = 0$

(4) كل متتالية متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد 4 فهي متقاربة نحو 4 .

(5) إذا كانت : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ فإنه ابتداء من رتبة معينة

تكون كل حدود (V_n) أصغر من -1000 .

(6) توجد دالتان g و f بحيث : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ بينهما $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x) = -1$

التمرين 2 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x + \frac{\sin x}{x}$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن : $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$

(2) استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

التمرين 3 :

نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = x^2 + x \sin x$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن : $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$

خاصية 8 : (نهاية المقلوب)

	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f} \right)(x)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{U_n} \right)$
1)	$\ell (\ell \neq 0)$	$\frac{1}{\ell}$
2)	$+\infty$	0
3)	$-\infty$	0
4)	$0 (f(x) > 0 \text{ و } U_n > 0)$	$+\infty$
5)	$0 (f(x) < 0 \text{ و } U_n < 0)$	$-\infty$
6)	0	حالة عدم التعيين

خاصية 9 :

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ فإن : $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = C$

وتبقى الخاصية صحيحة عند تعويض a ، b أو c بـ $+\infty$ أو $-\infty$.

خاصية 10 :

لنكن f دالة و (U_n) متتالية إذا كانت : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(U_n)] = b$

وتبقى الخاصية صحيحة عند تعويض a أو b بـ $+\infty$ أو $-\infty$.

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي سالب x فإن: $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$

(4) استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

التمرين 4 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x - \sin x}$
احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}}{x-2}$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f . 2- احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف.
3- عين بواسطة معادلاتها المستقيمات المقاربة.

التمرين 6 :

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = \frac{\sqrt{|x|} + \cos x}{x - \sin x}$

1- بين أن الدالة f معرفة على \mathbb{R}^* . 2- احسب النهاية للدالة f عند العدد 0.

التمرين 7 :

نعتبر الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة بالعلاقة :

$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx + 1$ حيث m وسيط حقيقي.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها حسب قيم m .
- استنتج وجود مستقيمات مقاربة عمودية.

التمرين 8 :

احسب النهايات التالية :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

التمرين 9 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

بين أن التمثيل البياني (C) للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين

معادلتيهما : $y = -\frac{1}{2}$ و $y = 2x + \frac{1}{2}$

تأكد من صحة هذه النتائج باستعمال آلة بيانية.

التمرين 10 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

1- عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f

فإن : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$

2- احسب نهايات الدالة f عند أطراف D_f .

3- بين أن التمثيل البياني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما.

4- ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

5- تأكد بيانيا من صحة النتائج باستعمال آلة بيانية.

التمرين 11 :

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x}$

1- برهن أنه يوجد عدداً حقيقياً a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x

فإن : $a \leq 2 + \sin x \leq b$

2- برهن على وجود دالتين g و h بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. ناقش حالة $x > 1$ و حالة $x < 0$.

3- عين النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

التمرين 12 :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^5 - 1}$$

التمرين 16 : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1} : n \in \mathbb{N}^* , p \in \mathbb{N}^*$

التمرين 13 :

نعتبر الدوال h, g, f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1} , g(x) = \frac{a}{x + 1} , h(x) = \frac{b}{x - 1}$$

عين العددين الحقيقيين الثابتان a و b بحيث :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{h} \right)(x) = 1$$

التمرين 14 :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)] \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)] \quad (5)$$

التمرين 15 :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + x} - 3} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - \sqrt{x^2 + x} - 3} \quad (3)$$

التمرين 16 :

$$f(x) = \frac{(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1}{(m - 1)x^2 + x - 2} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بالعبارة :}$$

حيث m وسيط من \mathbb{R} . ناقش حسب m : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

التمرين 17 :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} + x , g(x) = \sqrt{1+x^2} - x \quad \text{نعتبر الدالتان } f \text{ و } g \text{ المعرفتان كما يلي :}$$

(1) احسب $(f \times g)(x)$

(2) بين أنه من أجل كل عدد x من \mathbb{R} فإن : $f(x) \geq 0$ و $g(x) \geq 0$

(3) استنتج مما سبق أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

(4) نعتبر الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x)]$

بين مما سبق أن التمثيل البياني (C) للدالة h يقبل مستقيمين مقاربين مانلين بطلب تعيينهما .

(5) باستعمال آلة بيانية أنشئ (C)

الحلول

التمرين 1 :

$$\boxed{\cdot \sqrt{}} \quad (3) \quad \boxed{\cdot \times} \quad (2) \quad \boxed{\cdot \times} \quad (1)$$

$$\boxed{\cdot \sqrt{}} \quad (6) \quad \boxed{\cdot \sqrt{}} \quad (5) \quad \boxed{\cdot \times} \quad (4)$$

التمرين 2 :

$$(1) \text{ إثبات أن } f(x) \geq x - \frac{1}{x}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x : \sin x \geq -1$ وبما أن x موجب تماما فإن :

التمرين 4 :
حساب النهايات :
لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ وعليه :
 $-1 \leq -\sin x \leq 1$ وبالتالي : $x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$
ومنه : $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x - \sin x} \leq \frac{1}{x-1}$
وبالتالي

$$x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} \leq x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x - \sin x} \leq x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3x\sqrt{2} + \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

التمرين 5 :
1- تعيين مجموعة التعريف :
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0 ; x+7 \geq 0 ; x+14 \geq 0\}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 ; x \geq -7 ; x \geq -14\}$$

$$D_f = [-7 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$$

ومنه :
2- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}}{x-2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}}{x-2}$$

$$f(x) \geq x - \frac{1}{x} \quad \text{وبالتالي :} \quad x + \frac{\sin x}{x} \geq x - \frac{1}{x}$$

استنتاج (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x} = +\infty$ وبما أن : $f(x) \geq x - \frac{1}{x}$ فإن :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

التمرين 3 :
(1) تبين أن $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $-1 \leq \sin x \leq 1$
وبما أن x موجب فإن : $-x \leq x \sin x \leq x$

ومنه : $x^2 - x \leq x^2 + x \sin x \leq x^2 + x$

وعليه : $x(x-1) \leq x^2 + x \sin x \leq x(x+1)$

وبالتالي : $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$

(2) استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ لدينا : $x(x-1) \leq g(x) \leq x(x+1)$

لكن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) = +\infty$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

(3) تبين أن : $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$ لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$

وبما أن x سالبة فإن : $-x \geq x \sin x \geq x$

وعليه : $x \leq x \sin x \leq -x$

وبالتالي : $x^2 + x \leq x^2 + x \sin x \leq x^2 - x$

وعليه : $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$

(4) استنتاج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

لدينا : $x(x+1) \leq g(x) \leq x(x-1)$

لكن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-1) = +\infty$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

(2) حساب النهاية عند العدد 0 :

من أجل $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - \sin x}$$

من أجل $x < 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x} + \cos x}{x - \sin x}$$

ومن أجل $x \geq 0$: أي أن $x \geq \sin x$: $x - \sin x \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \cos x}{x - \sin x} = +\infty \quad \text{وعليه :}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \cos x \rightarrow 1 \\ x - \sin x \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

ومن أجل $x \leq 0$: $x \leq \sin x$: $x - \sin x \leq 0$ وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-x} + \cos x}{x - \sin x} = -\infty \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\begin{cases} \sqrt{-x} + \cos x \rightarrow 1 \\ x - \sin x \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

التمرين 7 :

- تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 + x + 1 \geq 0\}$$

لحل المتراجحة : $4x^2 + x + 1 \geq 0$

(1) $\Delta = (1)^2 - 4(4) = -15$: $\Delta < 0$ وعليه : $\Delta < 0$ ومنه :

$$D_f = \mathbb{R} : \text{إذن } \mathbb{R} \text{ هو عليه حلول المتراجحة}$$

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[4\sqrt{x+7} - 3\sqrt{x+14}][4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}]}{(x-2)[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4\sqrt{x+7})^2 - (3\sqrt{x+14})^2}{(x-2)[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{16(x+7) - 9(x+14)}{(x-2)[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7(x-2)}{(x-2)[4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}} = \frac{7}{24}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}} = \frac{7}{24}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+14} = +\infty \quad \text{لأن :}$$

3- تعيين المستقيمات المقاربة بواسطة معادلاتها :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و عليه التمثيل البياني للدالة f يقبل مستقيما مقاربا

معادلته : $y = 0$.

التمرين 6 :

1- تبين أن f معرفة على \mathbb{R}^* :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - \sin x \neq 0\}$$

وعليه : $x - \sin x = 0$ معناه : $\sin x = x$

وحل هذه المعادلة هو $x = 0$.

ومنه : $D_f = \mathbb{R}^* : \text{إذن : }]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x \left[\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 - \frac{1}{x} \right]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 - \frac{1}{x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x} \right]$$

$$\begin{cases} x \longrightarrow +\infty \\ \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x} \longrightarrow 2 + m \end{cases} \quad \text{ملاحظ أن :}$$

وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : \text{فإن } m > -2 \text{ أي } 2 + m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty : \text{فإن } m < -2 \text{ أي } 2 + m < 0$$

$$\bullet \text{ إذا كان } 2 + m = 0 \text{ أي } m = -2 : \text{ حالة عدم التعيين}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x - 1) : m = -2 \text{ لما}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x - 1) \right] \left[\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1) \right]}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x - 1)^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - (4x^2 - 4x + 1)}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + mx + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x} \right]$$

$$\begin{cases} -\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + m + \frac{1}{x} \longrightarrow m - 2 \\ x \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

نلاحظ أن :

وعليه :

$$m > 2 \quad \text{أي} \quad m - 2 > 0 \quad \text{إذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty : \text{فإن}$$

$$m < 2 \quad \text{أي} \quad m - 2 < 0 \quad \text{إذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty : \text{فإن}$$

$$m = 2 \quad \text{أي} \quad m - 2 = 0 \quad \text{إذا كان}$$

حالة عدم التعيين

إزالة عدم التعيين لما $m = 2$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[\sqrt{4x^2 + x + 1} + (2x + 1) \right] \left[\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1) \right]}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - (2x + 1)^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2 - 4x - 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} - (2x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \times x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x} = 0$$

(1)

التمرين 9:

اشارات ان (C) يقبل يقبل مستقيمين مقاربين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - \frac{1}{2} \quad (a)$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} -x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) = +\infty \quad \text{و عليه :}$$

بينما $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2} \right)$ في حالة عدم التعيين
ازالة عدم التعيين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] \left[\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2} \right) \right]}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 2x - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x \left[\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2 - \frac{1}{x}} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2 - \frac{1}{x}}} = -\frac{3}{4}$$

- إستنتاج وجود مستقيمات مقاربة :

من أجل $m = 2$. يوجد مستقيم مقارب معادلته $y = \frac{3}{4}x - \infty$ عند

من أجل $m = -2$: يوجد مستقيم مقارب معادلته $y = -\frac{3}{4}x + \infty$ عند

التمرين 8:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5x}{4x} \quad (1)$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5}{4} = 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{x^2} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x}$$

ومنه ندرس حالتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x} = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{x} = -\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \times \frac{x^2}{x} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \frac{1}{2}} = 0$$

وعليه : $y = -\frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$.

المبرين 10 :

1- تعيين الأعداد a, b, c, d :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\}$$

وعليه : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$f(x) = \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1} \quad \text{ولدينا :}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 - ax + bx^2 - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + (-a + c)x - b + d}{x^2 - 1} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -2 + c = -3 \\ 1 + d = 2 \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -a + c = -3 \\ -b + d = 2 \end{cases} \quad \text{وبالتالي :}$$

أي أن : $a = 2$; $b = -1$; $c = -1$; $d = 1$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{-x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{إذن :}$$

2 حساب النهايات عند أطراف D_f :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + x + \frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}} = 0$$

وعليه : $y = 2x + \frac{1}{2}$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[x + \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \right] (b)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = +\infty \quad \text{وعليه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{أما}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right) \right]}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

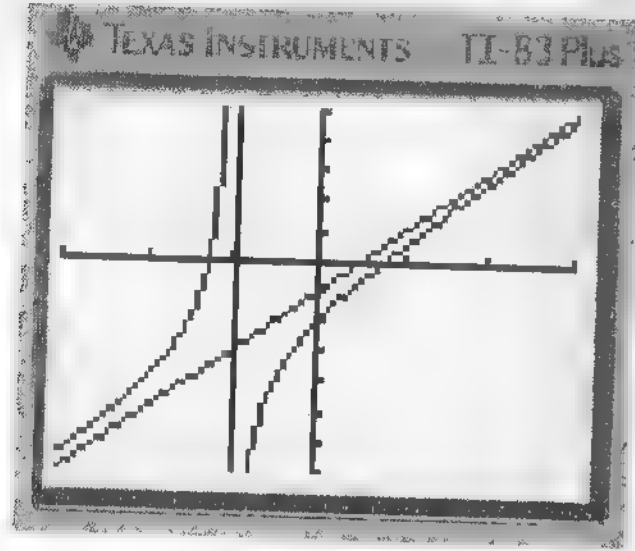
من أجل $x + 1 > 0$ أي $x > -1$ فإن : $f(x) - y = 0$

وعليه البيان يقع تحت المستقيم المقارب المائل .

من أجل $x + 1 < 0$ أي $x < -1$ فإن : $f(x) - y > 0$

وعليه البيان يقع فوق المستقيم المقارب المائل .

4- باستعمال الة بيانية نستنتج وجود مستقيمين مقاربين حسب الوضعية السابقة .



التمرين 11 :

(1) البرهان على وجود a و b :

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$

وعليه : $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$ ومنه : $a = 1$ و $b = 3$

(2) البرهان على وجود دالتين :

لدينا : $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ وعليه : $-1 \leq -\sin^2 x \leq 0$

وبالتالي : $x - 1 \leq x - \sin^2 x \leq x$... (1)

و مما سبق لدينا : $1 \leq 2 + \sin x \leq 3$

وعليه : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1$... (2)

من (1) و (2) ومن أجل $x \geq 1$ نجد : $\frac{x-1}{3} \leq \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x} \leq x$

ومنه لما $x \geq 1$: $\frac{x-1}{3} \leq f(x) \leq x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

إشارة $x^2 - 1$:

x	$+\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	0	$+$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \rightarrow 2 \\ x^2 - 1 \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - 3x + 2 \rightarrow 2 \\ x^2 - 1 \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = 0$$

حالة عدم التعيين , ومنه نزيل عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + x - 2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

3- تعيين معادلات المستقيمت المقاربة :

$$\bullet \text{ بما أن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

فإن $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب .

$$\bullet \text{ وبما أن : } f(x) = 2x - 1 + \frac{-x + 1}{x^2 - 1} \text{ ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$$

فإن : $y = 2x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

4- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى و المستقيم المقارب المائل :

$$\text{لدينا : } f(x) - (2x - 1) = \frac{-1}{x+1} \text{ وعليه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)}$$

$$= \frac{1+1+\dots+1}{1+1+\dots+1} = \frac{n}{p}$$

التمرين 13 :

يعين العددين a و b :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3 + 3x}{x+1}}{\frac{x^2 - 1}{a}}$$

لدينا :

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1} \times \frac{x+1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x+1}{a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x}{a(x-1)} = \frac{-4}{-2a} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} = 1 : \text{ عليه } a = 2 \text{ وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f}{h} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3 + 3x}{x-1}}{\frac{x^2 - 1}{b}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x-1}{b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x}{b(x+1)} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b}$$

$$\text{اذن : } g(x) = \frac{x-1}{3} \text{ و } h(x) = x$$

$$\text{من اجل } x < 0 : (1) \text{ تصبح : } -(x-1) \geq -(x - \sin x^2) \geq -x$$

$$\text{ومنه : } -x \leq -(x - \sin^2 x) \leq -x + 1 \quad \dots (3)$$

$$\text{من (2) و (3) نجد : } -\frac{x}{3} \leq \frac{-(x - \sin^2 x)}{2 + \sin x} \leq -x + 1$$

$$\text{وعليه : } -\frac{x}{3} \leq -f(x) \leq -x + 1$$

$$\text{ومنه : } x - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{3} \text{ اذن : } \frac{x}{3} \geq f(x) \geq x - 1$$

$$\text{اذن : } g(x) = x - 1 \text{ و } h(x) = \frac{x}{3}$$

(3) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\text{لدينا من اجل } x < 0 : x - 1 \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ومنه : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{لدينا من اجل } x \geq 1 : \frac{x-1}{3} \leq f(x) \leq x$$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ وعليه : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

التمرين 12 :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - 3x + 9) = 27$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 2 - (x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + (x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 2 - (x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + (x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + (x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left[-3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right]}{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) + (x^2 + x + 1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left[-3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right]}{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[-3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right]}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}][\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}]}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{-x \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{- \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right]} = -\frac{1}{2}$$

ومنه : $\frac{2}{b} = 1$ أي أن : $b = 2$

التمرين 14 :
- حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)][\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + 1)]}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)][\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + (x^2 + x + 1)]}{\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + (x^2 + x + 1)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 3}}{\sqrt{x^2 + x + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}\right]}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + x + 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}\right]}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = -2$$

(التمرين 16) :
من أجل $m \neq 1$ لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left[m^2 - m + \frac{2m}{x} + \frac{1}{x^2} \right]}{x^2 \left[m - 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right]}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1) \right] \quad \text{مما سبق :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left[-3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right]}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

..... : التمرين 15

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{2x + \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2x + x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right]}{x \left[2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{2x + \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right]}{x \left[2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = +\infty$$

(4) تبيان أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين :

$$h(x) = \frac{1}{2} [\sqrt{1+x^2} + x + \sqrt{1+x^2} - x]$$

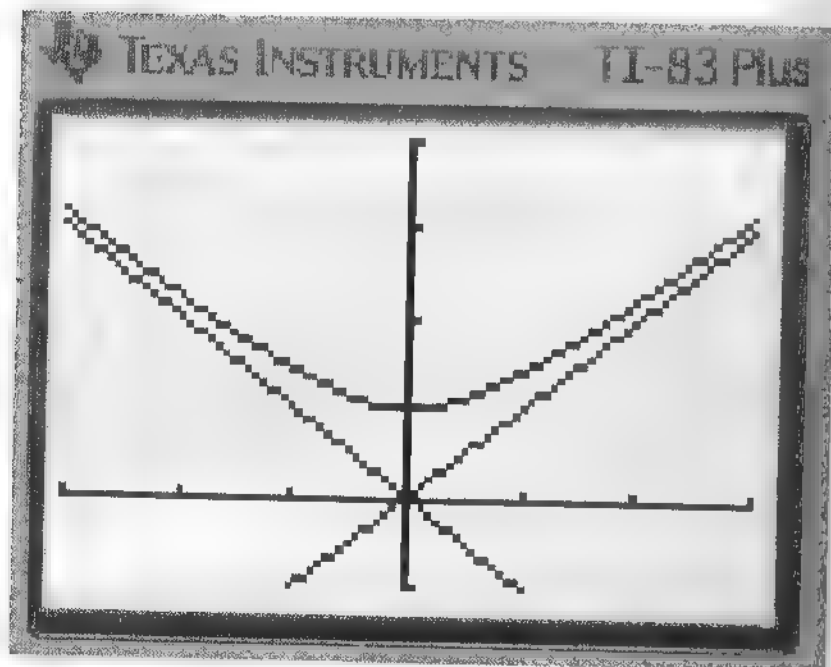
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x = 0 \quad \text{ومنه : } h(x) = \sqrt{1+x^2} \text{ و عليه :}$$

ومنه : $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ وكذلك :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} + x = 0 \quad \text{ومنه : } y = -x \text{ معادلة مستقيم مقارب}$$

مائل بجوار $-\infty$.

(5) انشاء بيان الدالة h :



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m^2 - m + \frac{2m}{x} + \frac{1}{x^2}}{m - 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{m^2 - m}{m - 1} = \frac{m(m-1)}{m-1} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 : m=1 \text{ من أجل } *$$

التمرين 17 :

(1) حساب $(f \times g)(x)$:

$$(f \times g)(x) = [\sqrt{1+x^2} + x][\sqrt{1+x^2} - x] = 1+x^2 - x^2 = 1$$

(2) - تبيان أن $f(x) \geq 0$:

- من أجل $x \geq 0$: $\sqrt{1+x^2} + x \geq 0$. محققة دوماً و عليه $f(x) \geq 0$.
- من أجل $x < 0$: $\sqrt{1+x^2} + x > 0$. معناه : $\sqrt{1+x^2} > -x$ و عليه : $1+x^2 > x^2$ أي $1 > 0$ وهذا محقق دوماً . إذن : $f(x) \geq 0$. و عليه : $f(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

- تبيان أن $g(x) \geq 0$:

- من أجل $x < 0$: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$. محققة دوماً . ومنه : $g(x) \geq 0$.
- من أجل $x \geq 0$: $\sqrt{1+x^2} - x > 0$. معناه : $\sqrt{1+x^2} > x$ ومنه : $1+x^2 > x^2$ أي $1 > 0$ محقق إذن : $g(x) \geq 0$. و عليه : $g(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

(3) استنتاج النهايات :

$$\text{لدينا : } (g \times f)(x) = 1 \text{ ومنه : } f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\text{ولدينا : } g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ ومنه : } g(x) = 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ إذن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$$

I- الدوال المستمرة :

تعريف 1 :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I يشمل عدد a .

نقول عن f أنها مستمرة عند a إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

مثال 1 :

الدالة : $f : x \mapsto x^2$ مستمرة عند العدد 2 لأن : $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 = f(2)$

مثال 2 :

الدالة : $f : x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة عند العدد 9 لأن : $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3 = f(9)$

مثال 3 :

الدالة : $f : x \mapsto \cos x$ مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ لأن : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

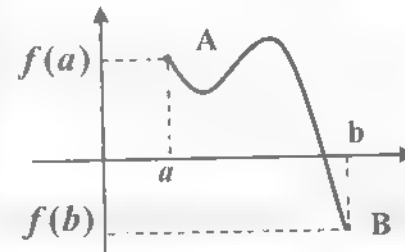
تعريف 2 :

f دالة معرفة على مجال I .

نقول عن f أنها مستمرة على I إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من I .

ملاحظة :

التمثيل البياني لدالة f مستمرة على مجال $[a ; b]$ يرسم من النقطة $A(a ; f(a))$ الى غاية النقطة $B(b ; f(b))$ دون توقف .



خاصية 1 :

- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على \mathbb{R} .

- الدوال المثلثية : $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ مستمرة على \mathbb{R} .

- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على \mathbb{R}_+ .

- إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على I فإن :

$f + g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ دوال مستمرة على مجموعات تعريفها.

أمثلة :

الدالة $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ مستمرة على كل من المجالين $]1 ; +\infty[$ و $]-\infty ; 1[$.

الدالة $f : x \mapsto \tan x$ مستمرة على مجموعة تعريفها أي من أجل

$\cos x \neq 0$ أي $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

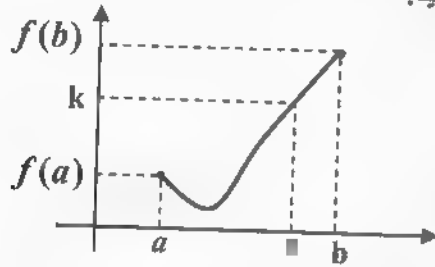
II نظرية القيم المتوسطة :

خاصية 2 : (نظرية القيم المتوسطة).

لكن f دالة معرفة ومستمرة على مجال I حيث a و b عدنان من I من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث : $f(c) = k$.

ملاحظة :

العدد c ليس بالضرورة وحيد .



خاصية 3 :

إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على مجال $[a ; b]$ ، فإنه من أجل كل حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة : $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً c من المجال $[a ; b]$.

خاصية 4 :

إذا كانت f دالة مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[a ; +\infty[$ أو $]a ; b]$ فإنه من أجل كل حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فإن المعادلة : $f(x) = k$ تقبل حلاً وحيداً c من المجال $[a ; b]$.

ملاحظة :

الخاصية السابقة تبقى صحيحة على كل من المجالات :

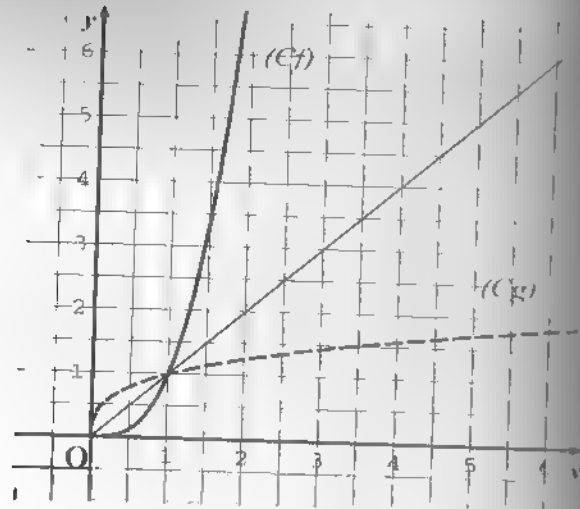
$[a ; b]$, $[a ; b[$, $]a ; b]$, $]a ; b[$, $]-\infty ; +\infty[$, $]-\infty ; a[$, $]a ; +\infty[$.

مثال :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{1}{x+2}$

مثال :

التي التمثيل البياني للدالتين : $f : x \mapsto x^3$, $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$



تعريف 5 :

a و b عدنان طبيعيان $b \neq 0$. x عدد حقيقي موجب نضع : $x^{\frac{a}{b}} = \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^a$

مثلة :

$$(81)^{\frac{3}{2}} = \left(81^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{81})^3 = 9^3 = 729 *$$

$$27^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^4} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} *$$

خاصية 6 :

x و y عدنان حقيقيان . n و p عدنان ناطقان غير معدومين لدينا :

$$x^n \times x^p = x^{n+p} \quad x^n \times y^n = (x \times y)^n \quad (x^n)^p = x^{n \cdot p}$$

امثلة :

$$4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 4^{\frac{5}{6}}$$

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{3} \times 4} = 5^{\frac{4}{3}}$$

$$3^{\frac{1}{5}} \times 4^{\frac{1}{5}} = (3 \times 4)^{\frac{1}{5}} = 12^{\frac{1}{5}}$$

الدالة f معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2; +\infty[$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$.

وعليه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]0; +\infty[$ فإن المعادلة :

$f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-2; +\infty[$.

III- دالة الجذر n - ièmes :

تعريف 3 :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فالدالة $f : x \mapsto x^n$ معرفة ومستمرة و متزايدة تماما على \mathbb{R}^+ .

وبما أن $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإنه حسب الخاصية 4 من أجل كل عدد حقيقي k

من \mathbb{R}^+ فإن المعادلة : $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R}^+ هذا الحل

يسمى الجذر n - ième وترمز له : $\sqrt[n]{k}$ أو $k^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة :

إذا كان n فردي فإن الدالة $f : x \mapsto x^n$ مستمرة ومتزايدة تماما على \mathbb{R}

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

فإنه حسب الخاصية 4 من أجل كل عدد k من \mathbb{R} فإن المعادلة $x^n = k$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R} وعليه الجذر n - ième للعدد k معرف على \mathbb{R} .

مثال :

من أجل $k > 0$: المعادلة $x^2 = k$ تقبل حلا وحيدا على \mathbb{R}^+ يسمى الجذر التربيعي للعدد

k وترمز له بالرمز \sqrt{k} أو $k^{\frac{1}{2}}$ واختصارا يرمز له بالرمز \sqrt{k} .

تعريف 4 :

من أجل كل عدد طبيعي موجب تماما n ، نسمي دالة الجذر n - ième الدالة f

المعرفة على \mathbb{R}^+ بالعلاقة : $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

خاصية 5 :

دالة الجذر n - ième f مستمرة و متزايدة تماما وتحقق $f(0) = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ التمثيلين البيانيين للدالتين $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و $x \mapsto x^n$

متناظرين بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

ضع العلامة \checkmark أمام كل جملة صحيحة و العلامة \times أمام كل جملة خاطئة.
(1) كل دالة موجبة على مجال I هي دالة مستمرة على I .

(2) إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على I فإن الدالة $\frac{f}{g}$ مستمرة على I .

(3) الدالة $|x| \mapsto x$ مستمرة على \mathbb{R} .

(4) الدالة f حيث :
$$\begin{cases} f(x) = x, & x \geq 0 \\ f(x) = x^2, & x < 0 \end{cases}$$
 مستمرة على \mathbb{R} .

(5) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a; b]$ وكان :

$$f(a) \times f(b) < 0$$

فإن : للمعادلة $f(x) = 0$ حلا على الأقل في المجال $]a; b[$.

(6) إذا كانت f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[3; 5]$ حيث $f(3) = 4$ و $f(5) = 10$ فإن للمعادلة $f(x) = 7$ حلا وحيدا في المجال $]3; 5[$.

(7) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I من \mathbb{R} فهي مستمرة عند كل قيمة a من I .

(8) إذا كانت f دالة مستمرة عند عدد a من مجال I فهي مستمرة عند كل قيم I .

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x, & x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند 2 ثم على \mathbb{R} .

ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بالعبارة :

$$f(x) = |4x - 5| \text{ على } \mathbb{R}$$

f دالة معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin 4x}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند 0 ثم على \mathbb{R} .

f دالة معرفة كما يلي :
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, \quad x \neq 3$$
 و $f(3) = 1$

ادرس استمرارية f على \mathbb{R} .

f دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = 2x^2 + 1, \quad x \geq 0$$

$$f(x) = 4x + b, \quad x < 0$$

حين قيمة العدد الحقيقي b بحيث تكون الدالة f مستمرة على \mathbb{R} .

f دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = 3x - 5, \quad x < 1$$

$$f(x) = ax + 2, \quad 1 \leq x < 4$$

$$f(x) = x^2 - b, \quad x \geq 4$$

عين العددين a و b حتى تكون f مستمرة على \mathbb{R} .

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	-5	2	5
$f(x)$	-2	1	-3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-5; 5]$

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	-5	2	5
$f(x)$	2	-3	1

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ في \mathbb{R} .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x^4 - 4x - 10$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} . استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

باستعمال آلة حاسبة استنتج حصرا لكل من حلولها في مجال سعته 10^{-3} .
التمرين 11 :

اثبت أن المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0; 1]$.

التمرين 12 :
أنشر العبارات التالية :

$$A = \left(5^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \right)^2 ; B = \left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$C = \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \right) \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} \right) ; D = \left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \right)^3$$

التمرين 13 :

بسط العبارات التالية :

$$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} ; \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} ; \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{9}$$

التمرين 14 :

1- حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x + 5 = 9$. 2- حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x^2 + 5 = 9$

3- حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x^3 + 5 = 9$. 4- حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x^4 + 5 = 9$

5- استنتج حلول المعادلة : $2x^n + 5 = 9$ حيث n عدد طبيعي غير معلوم .

التمرين 15 :

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بالعلاقة } \begin{cases} f(x) = x^3 - x - \frac{|x-1|}{x-1} : x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f . (2) ادرس استمرارية الدالة f عند العدد 1 .

(3) ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها .

(4) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[\frac{3}{2}; 1 \right]$.

التمرين 16 :

$$\text{اثبت أن المعادلة : } -\sin x + \frac{1}{4} \cos x = 0 \text{ تقبل على الأقل حلا في المجال } \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$$

التمرين 17 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$. α و β عدنان

حقيقيان موجبان برهن أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي λ ،

المجال : $[a; b]$ بحيث : $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\lambda)$.

التمرين 18 :

f دالة معرفة على $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ بالعلاقة :

$$\begin{cases} f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} , x \neq 0 \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة f عند 0 .

التمرين 19 :

في المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ و } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x , x \neq \frac{\pi}{4}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f . 2- ادرس استمرارية الدالة f عند $\frac{\pi}{4}$.

التمرين 20 :

المتك g الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالعلاقة : $g(x) = x^3 - 120x - 100$

(1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف المجال $[0; +\infty[$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g واكتب جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[20; 40]$.

(4) عين قيمة مقربة للوحدة للعدد α . استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعرف الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$

1- احسب نهايات الدالة f على أطراف $[0; +\infty[$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$$\begin{cases} f(x) = 4x - 5 ; x \geq \frac{5}{4} \\ f(x) = -4x + 5 ; x \leq \frac{5}{4} \end{cases} \text{ : عليه :}$$

• أسه استمرارية f عند $\frac{5}{4}$:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \left| 4 \times \frac{5}{4} - 5 \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{4}} (4x - 5) = 0 = f\left(\frac{5}{4}\right)$$

ومنه f مستمرة عند $\frac{5}{4}$ من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{4}} (-4x + 5) = 0 = f\left(\frac{5}{4}\right)$$

ومنه f مستمرة عند $\frac{5}{4}$ من اليسار ؛ وعليه f مستمرة عند $\frac{5}{4}$.

• دراسة استمرارية f على المجال $\left] \frac{5}{4} ; +\infty \right[$: $f(x) = 4x - 5$

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على \mathbb{R} ومنه فهي مستمرة

على المجال : $\left] \frac{5}{4} ; +\infty \right[$.

• دراسة استمرارية f على المجال : $\left] -\infty ; \frac{5}{4} \right[$: $f(x) = -4x + 5$.

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على \mathbb{R} ومنه فهي مستمرة

على المجال : $\left] -\infty ; \frac{5}{4} \right[$.

مما سبق : f مستمرة عند $\frac{5}{4}$ ومستمرة على كل من المجالين :

3- ادرس تغيرات الدالة f . 4- بين أن $y = x + 50$ معادلة مستقيم مقارب (D) للمنحنى

(C) . 5. أنشئ (D) و (C) .

نأخذ 1cm مقابل 5 على محور الفواصل و 20 على محور الترتيب .

6- حل بيانيا المعادلة $f(x) = 130$.

الحلول

التمرين 1 :

(1) ☐ × (2) ☐ × (3) ☐ √

(4) ☐ √ (5) ☐ √ (6) ☐ √

(7) ☐ √ (8) ☐ ×

التمرين 2 :

- دراسة استمرارية f عند 2 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 4x = 4$$

وعليه : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ومنه f مستمرة عند 2 .

- دراسة استمرارية f على \mathbb{R}

لدينا : $f(x) = x^2 - 4x$

ومنه : f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 2[$ و $]2 ; +\infty[$.

وبما أن الدالة f مستمرة عند 2 فإن الدالة f مستمرة على \mathbb{R} .

التمرين 3 :

- دراسة استمرارية f :

• كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = 4x - 5 ; 4x - 5 \geq 0 \\ f(x) = -(4x - 5) ; 4x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{5}{4}; +\infty \right[\text{ و }]-\infty; \frac{5}{4}] \text{ فهي مستمرة إذن على } \mathbb{R}.$$

التمرين 4 :

- دراسة استمرارية f عند 0 :

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \times \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \times 1 = 4$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$: إذن الدالة f مستمرة عند 0 .

- دراسة استمرارية f على \mathbb{R}

الدالة : $x \mapsto 4x$ دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على \mathbb{R} .

الدالة : $x \mapsto \sin x$ مستمرة على \mathbb{R} وعليه :

الدالة : $x \mapsto \sin 4x$ مستمرة على \mathbb{R} مركب دالتين مستمرتين على \mathbb{R} .

الدالة : $x \mapsto x$ مستمرة على \mathbb{R} لأنها دالة كثيرة حدود وعليه :

$$\text{الدالة : } \frac{\sin 4x}{x} \mapsto x \text{ مستمرة على كل من المجالين }]-\infty; 0[\text{ و }]0; +\infty[\text{ لأنها}$$

حاصل قسمة دالتين مستمرتين .

وبما أن الدالة f مستمرة عند 0 فهي مستمرة على \mathbb{R} .

التمرين 5 :

دراسة استمرارية f على \mathbb{R}

الاستمرارية عند 3 :

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ وعليه f مستمرة عند 3

الاستمرارية على \mathbb{R}

الدالة f هي حاصل قسمة دالتي كثير حدود فهي مستمرة على كل من المجالين $]3; +\infty[$ و $] -\infty; 3[$ و

$]3; +\infty[$ وبما أن f مستمرة عند 3 فهي إذن مستمرة على \mathbb{R} .

التمرين 6 :

- تعيين b بحيث تكون f مستمرة على \mathbb{R}

لما : $f(x) = 2x^2 + 1 : x \geq 0$

• هي دالة كثيرة حدود ومنه فهي مستمرة على $]0; +\infty[$: لأنها مستمرة على \mathbb{R}

لما : $x < 0 : f(x) = 4x + b$

• هي دالة كثيرة حدود فهي مستمرة على $] -\infty; 0[$: لأنها مستمرة على \mathbb{R} .

• الاستمرارية عند 0 : $f(0) = 2(0)^2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 4x + b = b$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون : $b = 1$ وأذاً تكون f مستمرة على \mathbb{R} .

التمرين 7 :

- تعيين a و b : $D_f = \mathbb{R}$

لما : $x < 1 : f(x) = 3x - 5$ وعليه f مستمرة على $] -\infty; 1[$

لأنها دالة كثير حدود .

لما : $1 < x < 4 : f(x) = ax + 2$ وعليه : f مستمرة على $]1; 4[$ لأنها

دالة كثيرة حدود .

لما : $x > 4 : f(x) = x^2 + 4$ وعليه : f مستمرة على $]4; +\infty[$ لأنها دالة

كثيرة حدود .

• الاستمرارية عند 1 : $f(1) = a(1) + 2 = a + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x - 5 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ax + 2 = a + 2$$

ومنه تكون f مستمرة عند 1 إذا كان : $a + 2 = -2$ وبالتالي : $a = -4$.

• الاستمرارية عند 4 : $f(4) = (4)^2 + b = 16 + b$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} ax + 2 = 4a + 2 = 4(-4) + 2 = -14$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + b = 16 + b$$

وعليه : $16 + b = -14$ ومنه : $b = -30$

وبالتالي تكون الدالة f مستمرة على \mathbb{R} إذا كانت مستمرة على كل من المجالات $] -\infty; 1[$ و

$]1; 4[$ و $]4; +\infty[$ ومستمرة عند 1 و 4 وبالتالي : $b = -30$ و $a = -4$

التمرين 8 :

- عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

استنتاج عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

• في المجال $]-\infty ; 1]$ لدينا : $f(1) = -13$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و f

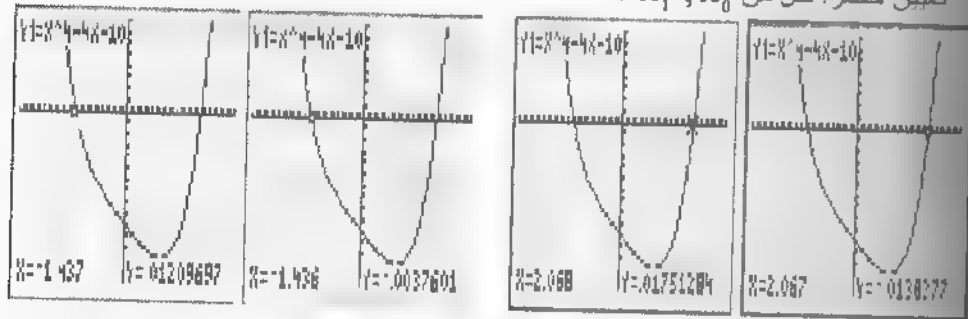
مستمرة و متناقصة تماما ومنه يوجد عدد وحيد x_0 بحيث : $f(x_0) = 0$

• في المجال $[1 ; +\infty[$ لدينا : $f(1) = -13$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و f

مستمرة و متزايدة تماما ومنه يوجد عدد وحيد x_1 بحيث : $f(x_1) = 0$

• إذن للمعادلة حلين x_0, x_1 .

1. نعين حصر الكل من x_0 و x_1 :



باستعمال الآلة البيانية نمثل بيان الدالة ثم باستعمال الزر يظهر مؤشر يعطي إحداثيات نقطة من المنحنى نحرك المؤشر يمينا ثم يسارا فنظهر قيمة مقربة لكل من x_0 و x_1 وعليه يمكن حصرهما كما يلي :

$$-1,437 < x_0 < -1,436 \quad \text{و} \quad 2,067 < x_1 < 2,068$$

التمرين 11 :

• اثبات ان المعادلة $\cos x = x$ تقبل حلا :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \cos x - x$

• الدالة f تقبل حلا وحيدا في المجال $[0 ; 1]$

معناه : f مستمرة ورتيبة تماما على $[0 ; 1]$ و $f(0) \times f(1) < 0$

• الدالة f مستمرة على $[0 ; 1]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على \mathbb{R} .

• لدينا : $f'(x) = -\sin x - 1$. وعليه لدينا : $\sin x > 0$ في المجال $[0 ; \pi]$.

ومنه : $\sin x > 0$ في المجال $[0 ; 1]$ وبالتالي : $-\sin x < 0$ في المجال $[0 ; 1]$

وبالتالي : $f'(x) < 0$ في المجال $[0 ; 1]$. إذن : f متناقصة تماما على المجال

$[0 ; 1]$. ولدينا : $f(0) = 1$ و $f(1) = \cos 1 - 1$

ونعلم $\cos x \leq 1$ من أجل $x \in \mathbb{R}$. ومنه : $f(1) < 0$ و $f(0) > 0$.

إذن : $f(0) \cdot f(1) < 0$

• في المجال $[-5 ; 2]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما

• ولدينا : $f(-5) = -2$ و $f(2) = 1$ وعليه : $f(-5) \times f(2) < 0$.

وعليه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $[-5 ; 2]$.

• في المجال $[2 ; 5]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما ولدينا : $f(2) = 1$ و

$f(5) = -3$ وعليه $f(2) \times f(5) < 0$. وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

في المجال $[2 ; 5]$ ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في المجال $[-5 ; 2]$.

التمرين 9 :

• عدد حلول المعادلة : $f(x) = -1$

• في المجال $]-\infty ; 1]$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $f(1) = -3$

وعليه : للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في المجال $]-\infty ; 1]$.

• في المجال $[1 ; +\infty[$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما ولدينا : $f(1) = -3$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. وعليه للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد في $[1 ; +\infty[$

وعليه للمعادلة $f(x) = -1$ حلين في \mathbb{R} .

التمرين 10 :

1- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$D_f =]-\infty ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

$$f'(x) = 4x^4 - 4 = 4(x^3 - 1)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[1 ; +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty ; 1]$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	-13	$+\infty$

$$= 6^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}}$$

$$= 6^{\frac{1+2}{3}} = 6$$

$$\bullet \sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{2} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{5}}\right) = (2^3)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\bullet \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{9} = (27)^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$$

$$= 3^{\frac{3+2}{3}} = 3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{13}{6}}$$

.....: التمرين 14

(1) حل المعادلة : $2x + 5 = 9$

أي : $2x = 4$ ومنه : $x = 2$ إذن : $S = \{2\}$.

(2) حل المعادلة : $2x^2 + 5 = 9$

أي : $2x^2 = 4$ ومنه : $x^2 = 2$ وعليه : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

إذن : $S = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$

(3) حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x^3 + 5 = 9$

$2x^3 = 4$ معناه : $2x^3 = 4$ ومنه : $x^3 = 2$

وعليه : $x = \sqrt[3]{2}$ إذن : $S = \{\sqrt[3]{2}\}$

(4) حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x^4 + 5 = 9$

أي : $2x^4 = 4$ ومنه : $x^4 = 2$ وبالتالي : $x = \sqrt[4]{2}$ أو $x = -\sqrt[4]{2}$

إذن : $S = \{-\sqrt[4]{2} ; \sqrt[4]{2}\}$

(5) استنتاج حلول المعادلة : $2x^n + 5 = 9$

• من أجل n زوجي مجموعة الحلول هي : $S = \{-\sqrt[n]{2} ; \sqrt[n]{2}\}$

• من أجل n فردي مجموعة الحلول : $S = \{\sqrt[n]{2}\}$

.....: التمرين 15

(1) مجموعة التعريف :

وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد $x_0 \in]0 ; 1[$ بحيث

$f(x_0) = 0$ ومنه : للمعادلة $\cos x - x = 0$ حلا وحيد أي $\cos x_0 = x_0$.

.....: التمرين 12

النشر :

$$A = \left(5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}\right)^2 = \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2 \left(5^{\frac{3}{2}}\right) \cdot 3^{\frac{5}{2}} + \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^2$$

$$= 5^{3 \times 2} + 2 (5 \times 3)^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \times 2 = 5^3 + 2 (15)^{\frac{5}{2}} + 3^5$$

$$= 125 + 2 (15)^2 + 243 = 368 + 2 (15)^{\frac{5}{2}}$$

$$B = \left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \left(3^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right) + \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= 3 + 2 (3 \times 2)^{\frac{1}{2}} + 2 = 5 + 2 (15)^{\frac{1}{2}} + 3^5 = 5 + 2 \sqrt{6}$$

$$C = \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right) \left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right) = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5 - 3 = 2$$

$$D = \left(3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3 \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right) + 3 \left(3^{\frac{1}{3}}\right) \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$= 3 - 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 3 \left(3^{\frac{1}{3}}\right) \times 2^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$= 1 - 3^{1+\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 3^{1+\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 1 - 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}}$$

.....: التمرين 13

التبسيط :

$$\bullet \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} = 6^{\frac{1}{3}} \times (36)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} (6)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = x^3 - x - \frac{x-1}{x-1} : x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

وعليه الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$

لكن $f(1) = -1$ ومنه f معرفة عند 1 وبالتالي $D_f = \mathbb{R}$.

(2) دراسة استمرارية f عند 1 :

• كتابة f دون رمز القيمة المطلقة : لدينا

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \frac{x-1}{x-1} ; x > 1 \\ f(x) = x^3 - x - \frac{-(x-1)}{x-1} ; x < 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - x - 1 = -1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 - x + 1 = 1$$

ومنه f لا تقبل نهاية عند 1. وبالتالي f غير مستمرة عند 1 لكنها مستمرة عند 1 من اليمين.

(3) دراسة الاستمرارية على D_f

• في المجال $]1; +\infty[$: $f(x) = x^3 - x - 1$ ومنه f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة.

• في المجال $]1; -\infty[$: $f(x) = x^3 - x + 1$ ومنه f دالة كثيرة حدود فهي مستمرة.

لكن f غير مستمرة عند 1 فهي غير مستمرة على \mathbb{R} .

غير أن f مستمرة على كل من المجالين $]1; -\infty[$ و $]1; +\infty[$.

$$(4) \text{ إثبات أن المعادلة : } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا في المجال }]1; \frac{3}{2}[$$

• الدالة f مستمرة على $]1; +\infty[$ وعليه فهي مستمرة على $]1; \frac{3}{2}[$.

$$\bullet \text{ ولدينا : } f(1) = -1 \text{ و } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} \text{ ومنه } f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد $x_0 \in]1; \frac{3}{2}[$

$$\bullet \text{ ولدينا من أجل } x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = x^3 - x - \frac{x-1}{x-1}$$

المبرين 16 :

اثبات وجود الحل :

$$f(x) = -\sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

على المجال $[0; \frac{\pi}{4}]$ الدالة f مستمرة لأنها مجموع و جداء دوال مستمرة على \mathbb{R} .

$$\bullet \text{ ولدينا : } f(0) = -\sin 0 + \frac{1}{4} \cos 0 = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{2}}{8} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

وعليه : ومنه يوجد على على الأقل عدد $a \in]0; \frac{\pi}{4}[$ و $f(a) = 0$

$$\bullet \text{ أي أن المعادلة : } -\sin x + \frac{1}{4} \cos x = 0 \text{ تقبل حلا على الأقل في المجال }]0; \frac{\pi}{4}[$$

المبرين 17 :

اثبات وجود λ :

لدرس حالتين :

(1) إذا كان : $f(a) < f(b)$ بضرب الطرفين في α نجد : $\alpha f(a) < \alpha f(b)$

وبإضافة $\beta f(b)$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$\alpha f(a) + \beta f(b) < \alpha f(b) + \beta f(b)$$

ومنه : $\alpha f(a) + \beta f(b) < (\alpha + \beta) f(b)$ وبالتالي :

$$\frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} < f(b) \dots (1)$$

لدينا : $f(b) > f(a)$ بضرب الطرفين في β نجد : $\beta f(b) > \beta f(a)$

بإضافة $\alpha f(a)$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$\alpha f(a) + \beta f(b) > \alpha f(a) + \beta f(a)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin x + \sqrt{2} & ; x > 0 \\ f(x) = \sin x - \sqrt{2} & ; x \leq 0 \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

ومنه الدالة f غير مستمرة عند 0.

التمرين 19 :
1 تعيين مجموعة التعريف :

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x \quad ; \quad x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$D_f = \left\{ x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right] : \cos x \neq 0 \text{ و } \cos 2x \neq 0 \right\}$$

$$\cos x = 0 \text{ معناه : } x = \frac{\pi}{2} \text{ أي } 2x = \frac{\pi}{2} \text{ أي } \cos 2x = 0 \text{ معناه : } 2x = \frac{\pi}{2} \text{ أي } x = \frac{\pi}{4}$$

$$D_f = \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[\text{ وعليه : } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ لكن } x = \frac{\pi}{4}$$

2 دراسة استمرارية f عند $\frac{\pi}{4}$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\cos x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\cos^2 x \cos 2x}$$

$$\text{نضع : } x - \frac{\pi}{4} = z \text{ أي } x = \frac{\pi}{4} + z \text{ لئلا : } x \longrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ فإن } z \longrightarrow 0$$

ومنه : $\alpha f(a) + \beta f(b) > (\alpha + \beta) f(a)$

$$\frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} > f(a) \dots (2) \quad \text{أي أن :}$$

$$f(a) < \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} < f(b) \quad \text{من (1) و (2) :}$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد λ من المجال $]a ; b[$

$$\frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta} = f(\lambda) \quad \text{بحيث :}$$

إذن : $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\lambda)$

(2) إذا كان : $f(a) > f(b)$: نفس طريقة الحل السابقة.

التمرين 18 :

$$\text{لدينا : } f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} \quad ; \quad x \neq 0$$

$$\bullet D_f = \left\{ x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] : 1 - \cos 2x \geq 0 \text{ و } \sin x \neq 0 \right\}$$

لدينا : $\sin x \neq 0$ معناه $x \neq 0$

$1 - \cos 2x \geq 0$ معناه : $\cos 2x \leq 1$ وهذا محقق دوما في المجال

$$\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] \text{ ومنه } f \text{ معرفة على } \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] - \{0\}$$

$$\text{وبما أن } f(0) = \sqrt{2} \text{ فإن } f \text{ معرفة على } \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$$

• تبسيط $f(x)$:

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{1 - (1 - 2 \sin^2 x)} = \sqrt{2 \sin^2 x}$$

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} |\sin x|$$

$$\bullet \begin{cases} f(x) = \sin x + \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{\sin x} \\ f(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

ومنه :

x	0	20	$+\infty$
$g'(x)$	-	\circ	+

وبالتالي g متزايدة تماماً على المجال $[20; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[0; 20]$.

جدول التغيرات :

x	0	20	$+\infty$
$g'(x)$	-	\circ	+
$g(x)$	-100	-16100	$+\infty$

$$g(20) = (20)^3 - 1200(20) - 100 = -16100$$

(١) سأن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً :

• في المجال $[20; 40]$ الدالة g مستمرة لأنها دالة كثير حدود.

• لدينا : $g(20) = -16100$

$$g(40) = (40)^3 - 1200(40) - 100 = 15900$$

$$g(20) \cdot g(40) < 0 \quad \text{ومنه :}$$

لدينا g متزايدة تماماً على المجال $[20; 40]$ حسب نظرية القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد α من المجال $[20; 40]$ بحيث : $g(\alpha) = 0$

$y1=X^3-1200X-100$	
$X=34.88255 \quad y=-13941.81$	

• تعيين قيمة مقربة للوحدة للعدد α .

• باستعمال آلة بيانية نجد : $\alpha \approx 35$.

(١) استنتاج إشارة : $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	\circ	+

(١ - ١) حساب نهايات الدالة f :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right) \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right)} \quad \text{وعليه :}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left(2z + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2z \right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2z}{-\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right) \sin 2z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 z)}{-\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right) \sin 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 z}{-\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right) \sin 2z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-2\sin z}{2\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + z \right) \cos z} = 0 = f \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

ومنه f مستمرة عند $\frac{\pi}{4}$.

التمرين 20 :

(١ - ١) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 1200x - 100 = -100$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[1 - \frac{1200}{x^2} - \frac{100}{x^3} \right] = +\infty$$

(2) دراسة اتجاه التغير :

$$g'(x) = 3x^2 - 1200 \quad \text{ومنه :} \quad g'(x) = 3(x^2 - 400)$$

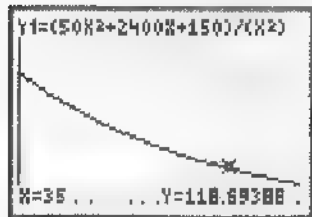
$$g'(x) = 0 \quad \text{معناه :} \quad x = 20 \quad \text{أو} \quad x = -20 \quad (\text{مرفوضة})$$

$$f(\alpha) = \alpha + 50 + \frac{1200\alpha + 50}{\alpha^2} = \frac{\alpha^3 + 50\alpha^2 + 1200\alpha + 50}{\alpha^2}$$

$$\alpha^3 - 1200\alpha - 100 = 0 \quad \text{ومنه} \quad g(\alpha) = 0$$

$$\alpha^3 = 1200\alpha + 100 \quad \text{أو أن}$$

$$f(\alpha) = \frac{1200\alpha + 100 + 50\alpha^2 + 1200\alpha + 50}{\alpha^2}$$



$$f(\alpha) = \frac{50\alpha^2 + 2400\alpha + 150}{\alpha^2}$$

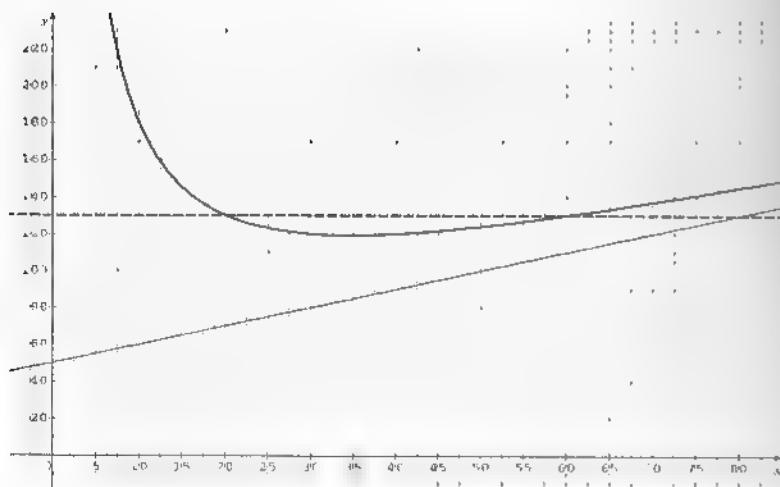
$$f(\alpha) \approx 119 \quad \text{باستعمال آلة بيانية نجد}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = 0 \quad \text{لدينا}$$

إذن (D) مستقيم مقارب مائل.

(C) و (D) شعاع

لدينا: $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب.
وكذلك $y = x + 50$ معادلة مستقيم مقارب.



$$f(x) = 130 \quad \text{الحل البياني للمعادلة}$$

بيانيا للمعادلة: $f(x) = 130$ حلين متمايزين هما بالتقريب 20 و 60.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 50 + \frac{1200}{x^2} + \frac{50}{x^2} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \quad \text{(2) تبيان أن}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1200x^2 - 2x(1200x + 50)}{x^2} = \frac{x^4 + 1200x^2 - 2400x^2 - 110x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x [x^3 - 1200x - 100]}{x^4} = \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3} \quad \text{وعليه}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \quad \text{إذن}$$

(3) دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3} \quad \text{لدينا}$$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
x^3	0	+	+
$f'(x)$	-	0	+

- جدول التغيرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

1- تعريف العدد المشق :

f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد x_0 . نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند

$$x_0 \text{ إذا وفقط إذا كانت : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

حيث ℓ عدد حقيقي ثابت ويدعى العدد المشق للدالة f عند x_0 ونكتب : $f'(x_0) = \ell$.

ملاحظات :

$$(1) \text{ بوضع } x - x_0 = h \text{ نجد : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell$$

$$(2) \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ غير موجودة أو تساوي } +\infty \text{ أو } -\infty \text{ فإن الدالة } f$$

لا تقبل الاشتقاق عند x_0 .

التفسير الهندسي :

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 فإن تمثيلها البياني يقبل في النقطة $A(x_0; f(x_0))$

مماسا معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته : $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

التفسير العددي :

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 فإن الدالة التالفة :

$$x \mapsto f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0) \text{ هي تقريب للدالة } f \text{ عندما تقترب } x \text{ من } x_0$$

ويكون لدينا $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ حيث نرمز لـ :

$f(x) - f(x_0)$ بالرمز Δy . ونرمز لـ $x - x_0$ بالرمز Δx فيكون :

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

2- الدالة المشتقة لدالة :

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل عدد x من المجال I نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق

على I . نسمي الدالة المشتقة للدالة f الدالة التي لرمز لها بالرمز f' حيث :

$$f' : x \mapsto f'(x) \text{ . العدد } f'(x) \text{ يكتب : } \frac{dy}{dx} \text{ إذن } \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\text{ ومنه : } dy = f'(x) \cdot dx$$

مثال :

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0 .

ملاحظة : العكس غير صحيح .

فمثلا الدالة $|x| \mapsto x$ مستمرة عند 0 لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0.

1 استقاق دالة مركبة :

مثال :

إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 وكانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x_0)$ فإن

الدالة $f \circ g$ تقبل الاشتقاق عند x_0 ويكون : $(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \times g'(x_0)$.

مثال 1 :

$$\text{نعتبر الدالة } h \text{ حيث : } h(x) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$$

بين أن h تقبل الاشتقاق عند كل عدد x من \mathbb{R} معينا دالتها المشتقة .

الحل :

$$\text{الدالة : } g : x \mapsto 2x - \frac{\pi}{4} \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ لأنها دالة كثيرة حدود.}$$

$$\text{الدالة : } f : x \mapsto \cos x \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ لأنها دالة مثلثية.}$$

ومن هنا : $h = f \circ g$ فإن h تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} حيث :

$$h'(x) = f'[g(x)] \times g'(x) \text{ . ومنه : } h'(x) = -\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \times 2$$

$$\text{ إذن : } h'(x) = -2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

مثال 2 :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I او دالتها المشتقة f' . إذا كانت دالتها المشتقة f' تقبل الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' . وهكذا نعرف الدالة المشتقة من الرتبة الثالثة ونرمز لها بالرمز $f^{(3)}$ ويمكن تعريف الدوال المشتقة من مراتب عليا فنعرف الدالة المشتقة من الرتبة n ونرمز لها بالرمز $f^{(n)}$.

مثال :

المشتقات المتتابعة للدالة $f : x \mapsto x^5 + 3x^3 - 5x + 2$ معرفة كما يلي :

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2 - 5 ; \quad f''(x) = 20x^3 + 18x$$

$$f^{(3)}(x) = 60x^2 + 18 ; \quad f^{(4)}(x) = 120x$$

$$f^{(5)}(x) = 120 ; \quad f^{(6)}(x) = 0$$

$$f^{(n)}(x) = 0 : n \geq 6$$

7 - نقطة الانعطاف :

إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية $f^{(2)}$ للدالة f عند عدد x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة

$$A(x_0 ; f(x_0))$$

8 - اتجاه تغير دالة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

- تكون الدالة f ثابتة على I إذا وفقط إذا كانت f' معدومة على I .
- تكون الدالة f متزايدة تماما على I إذا وفقط إذا كانت f' موجبة تماما على I أو معدومة عند قيم معزولة من I .
- تكون الدالة f متناقصة تماما على I إذا وفقط إذا كانت f' سالبة تماما على I أو معدومة عند قيم معزولة من I .

9 - حل معادلات تفاضلية :

النوع الاول :

$$y' = f(x) \text{ وهو إيجاد دالة } g \text{ حيث : } g'(x) = f(x).$$

مثال :

$$\text{حل المعادلة التفاضلية : } y' = 2x + 4 \text{ هو } y = x^2 + 4x + k \text{ حيث : } k \text{ ثابت حقيقي.}$$

النوع الثاني :

$$y'' = f(x) \text{ وهو إيجاد دالة } g \text{ حيث : } g''(x) = f(x).$$

مثال :

$$\text{حل المعادلة التفاضلية : } y'' = 4x + 5.$$

مشتقة الدالة : $x \mapsto \sin(ax + b)$.

هي الدالة : $x \mapsto a \cos(ax + b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

4- مشتقات الدوال المألوفة :

الدالة	الدالة المشتقة	مجال الاشتقاق
$x \mapsto k$ <small>k ثابت حقيقي</small>	$x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	\mathbb{R}
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{-n}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	\mathbb{R}

5- عمليات على المشتقات :

الدالة	الدالة المشتقة	ملاحظات
$f + g$	$f' + g'$	
kf	kf'	k ثابت حقيقي
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	
$\frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$	$f(x) \neq 0$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g(x) \neq 0$
f^n	$n \times f' \times f^{n-1}$	$n \in \mathbb{Q}$
\sqrt{f}	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x) > 0$

6- المشتقات المتتالية :

لدينا : $y' = 2x^2 + 5x + k$ ، ومنه : $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5x^2}{2} + kx + c$ حيث k و c عددان حقيقيان

ثابتان

التمارين

التمرين 1 :

ضع العلامة $\sqrt{}$ أمام كل جملة صحيحة و العلامة \times أمام كل جملة خاطئة .

(1) إذا كانت : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 4$ فإن : $f'(3) = 4$.

(2) إذا كان : $f'(2) = 3$ فإن f مستمرة عند 2 .

(3) إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ فإن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3$.

(4) إذا كنت : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ فإن f تقبل الاشتقاق عند 0 .

(5) إذا كانت : $f(x) > 0$ على مجال I فإن $f'(x) > 0$ على I .

(6) إذا كان : $f'(0) = 2$ فإن : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2$.

(7) توجد دالة f تقبل الاشتقاق عند عدد x_0 لكنها غير مستمرة عند x_0 .

(8) توجد دالة f مستمرة عند عدد x_0 لكنها غير قابلة للاشتقاق عند x_0 .

(9) إذا كانت f' موجبة تماما على كل من المجالين $[0 ; 4]$ و $[4 ; 7]$.

و $f'(4) = 0$ و $f'(7) = 0$ فإن f متزايدة تماما على $[0 ; 7]$.

(10) إذا كانت f' سالبة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -4]$ و $]4 ; +\infty[$.

ومنعدمة على المجال $[-4 ; 4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على \mathbb{R} .

(11) إذا كانت f غير قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإن f غير مستمرة عند x_0 .

(12) إذا كانت الدالة f غير مستمرة عند عدد x_0 فإن f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 .

(13) إذا كانت f دالة كثيرة حدود درجته n فإن الدالة المشتقة من الرتبة أي $f^{(n+1)}$ معدومة .

التمرين 2 :

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد x_0 في كل حالة ممايلي :

(1) $f(x) = x^3 - x^2 + 4$ ؛ $x_0 = 2$

(2) $f(x) = x + 3 + \frac{5}{x-2}$ ؛ $x_0 = 3$

(3) $f(x) = \sqrt{5-x}$ ؛ $x_0 = 0$

(4) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 10x + 3}$ ؛ $x_0 = \frac{3}{4}$

(5) $f(x) = \frac{|x-4| + 2x + 4}{x+2}$ ؛ $x_0 = 4$

(6) $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-4} ; x \geq 4 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3x - 6}{x-4} ; x < 4 \end{cases}$ ؛ $x_0 = 4$

التمرين 3 :

اليك التمثيل البياني (C) لدالة f تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} في معلم متعامد متجانس

(O ; \vec{i} , \vec{j}) حيث (Δ) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة A ذات الفاصلة 6

و (D) هو المماس للمنحنى (C) في النقطة B ذات الفاصلة -6 .

(1) استنتج من البيان $f'(6)$ و $f'(-6)$.

(2) استنتج كل من : $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x-6}$ و $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{f(x)}{x+6}$

(3) اكتب كل من معادلتى (Δ) و (D) .

$$f(x) = \sqrt{2\sin^2 x + 1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1} \quad (13)$$

$$f(x) = \tan x - \sin x + 1 \quad (15)$$

التمرين 5 :

f و g دالتان تقبلان الاشتقاق على \mathbb{R} . اتجاه تغيرات كل من f' و g' معطاة في الجدولين الاتيين :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$		2	

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		-4	

استنتج اتجاه تغير كل من الدالتين f و g .

التمرين 6 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة $f(x) = 2x^2 - 4 + 4|x + 3|$.

(1) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

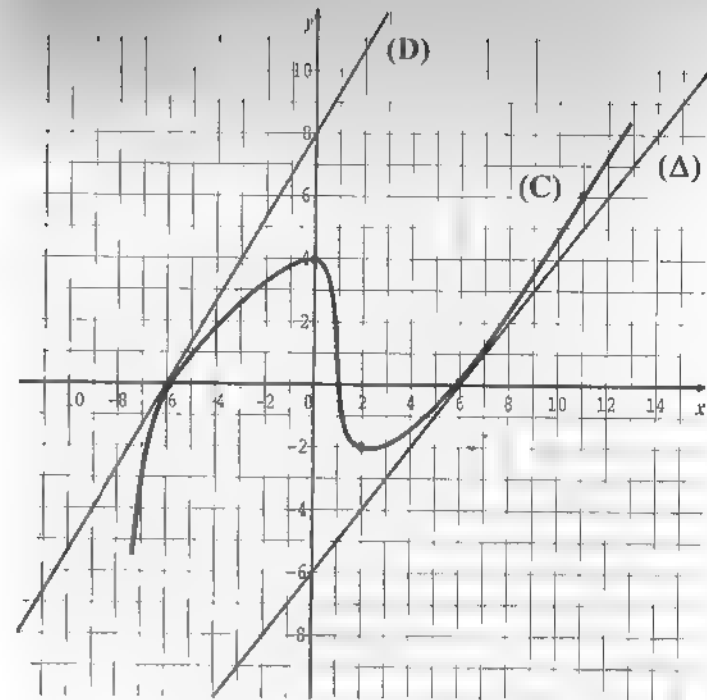
(2) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند -3.

التمرين 7 :

f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2(x+2)^2}}{(x+2)(|x|+2)} ; x \neq -2 \\ f(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند -2.



التمرين 4 :

عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم أحسب دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{5}{x} + 2 \quad (2) \quad f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (4) \quad f(x) = \frac{4x}{x^2-1} + 5x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{x-1} \quad (6) \quad f(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^2 \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{2x-3} + x \quad (8) \quad f(x) = (\sqrt{x}-3)^2 \quad (7)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}} \quad (10) \quad f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}} \quad (9)$$

$$f(x) = \sin^4 x \quad (12) \quad f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x \quad (11)$$

(2) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند -2 .

التمرين 8 :

$$f \text{ دالة معرفة بالعبارة : } f(x) = \frac{1}{x-1}$$

(1) احسب $f^{(4)}(x)$.

(2) استنتج $f^{(n)}(x)$.

التمرين 9 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \sin x$.

(1) احسب كل من : $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$; $f^{(4)}(x)$; $f^{(5)}(x)$.

(2) استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$.

التمرين 10 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \sin^2 x$.

بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$.

التمرين 11 :

نعرف الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x^2 + \cos x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f' على $[0 ; +\infty[$.

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $[0 ; +\infty[$.

التمرين 12 :

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة : $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f' على \mathbb{R} .

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} .

(3) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

التمرين 13 :

f دالة معرفة على المجال $[-2 ; 2]$ بالعبارة : $f(x) = (x+4)\sqrt{4-x^2}$.

(1) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f على $[-2 ; 2]$.

(2) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة 0.

(3) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المماس (Δ) .

التمرين 14 :

f دالة تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} حيث : $f'(y) = \frac{1}{y^2 + 1}$.

احسب في كل حالة مما يلي $g'(x)$ ثم استنتج $(fog)'(x)$.

(1) $g(x) = \cos x$

(2) $g(x) = 5x - 3$

(3) $g(x) = \sqrt{x}$

(4) $g(x) = x$

التمرين 15 :

(1) نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2 ; \frac{5}{2}]$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$.

حيث (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ (الوحدة 2cm).

1- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات للدالة f عند اطرافها.

2- عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f

فإن : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$.

3- بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب إعطاء معادلته.

4- ادرس الوضعية النسبية للمستقيم (Δ) و المنحنى (C).

5- بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين .

6- بين أن إشارة $f'(x)$ تتطابق بإشارة $x \times g(x)$.

7- اكتب جدول تغيرات الدالة f .

8- أنشئ (C) باستعمال إحدى برمجيات التمثيل البياني .

التمرين 16 :

نعرف على \mathbb{R} الدالة f بالعلاقة : $f(x) = \frac{|x^2 - 3x|}{x + 1}$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

(3) بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ في كل حالة .

(4) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج ؟

(5) احسب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{h}$. ماذا تستنتج ؟

(6) ادرس تغيرات الدالة f .

(7) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x - 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

(8) أنشئ (Δ) و (C) .

(9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$m(x+1) = |x^2 - 3x| \quad ; \quad \text{حل المعادلة من أجل } m = 1$$

التمرين 17 :

f دالة معرفة بالعلاقة : $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين مجموعة التعريف D_f للدالة f .

(2) بين أنه من أجل كل عدد x من D_f فن : $f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$.

(3) ادرس تغيرات الدالة f .

(4) بين أن المستقيم الذي معادلته : $y = 2x + 3$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

(5) بين أن (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

$$\text{حيث : } \frac{-3}{8} < x_0 < \frac{-1}{4}$$

(6) اكتب معادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة 0 .

(7) أنشئ (C) .

(8) عين النقطة من (C) إلى تكون إحداثياتها أعدادا صحيحة .

(9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$2x^3 + (7-m)x^2 + 2(4-m)x + 2 - m = 0$$

التمرين 18 :

ليكن (C) التمثيل البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

للدالة f المعرفة بالعلاقة : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

(2) بين أنه يمكن كتابة $f'(x)$ على الشكل : $f'(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$.

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

(3) ادرس تغيرات الدالة f .

(4) - بين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ) .

- ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left[\frac{3}{4}; \frac{2}{3}\right]$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

(6) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(2; f(2))$.

أنشئ (C) .

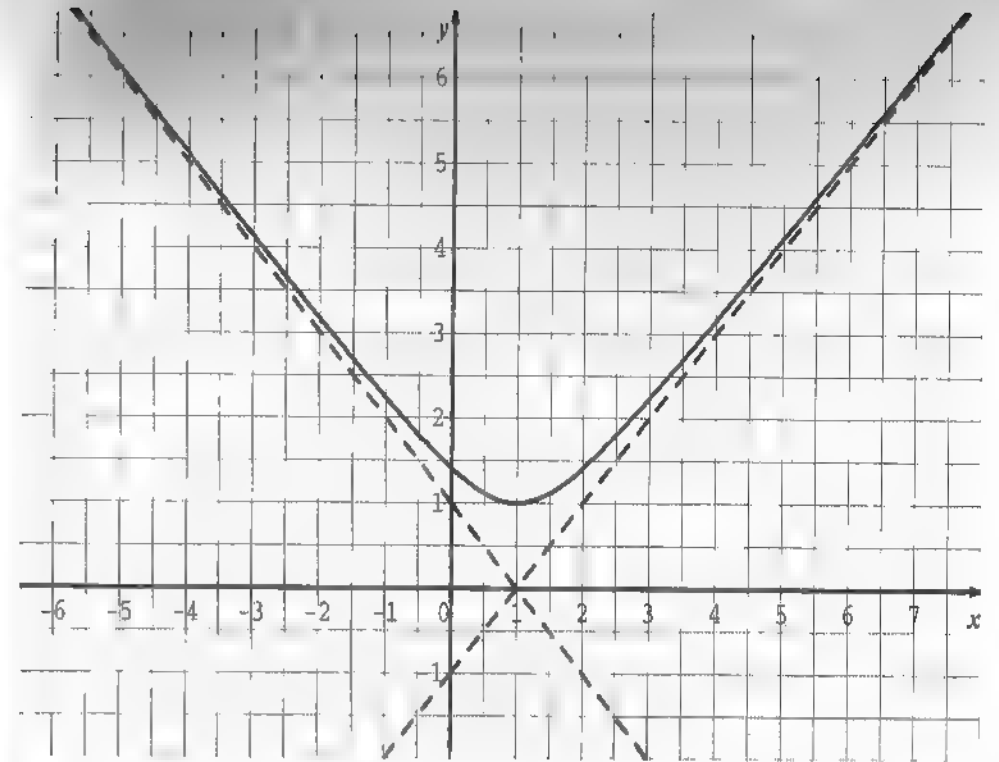
(7) ناقش بياناتا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x) - 2m = 0$$

(8) لتكن g الدالة المعرفة بالعبارة : $g(x) = |x| - 2 + \frac{3|x| - 2}{(|x| - 1)^2}$.

- عين D_g و بين أن g دالة زوجية .

- استنتج إنشاء تمثيلها البياني (C') في المعلم السابق .



(I) استنتج من خلال البيان :

(1) اتجاه تغير الدالة f .

(2) محور تناظر المنحنى (C) .

(3) نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

(4) معادلتى المستقيمين المقاربين المائلين و وضعيتهما بالنسبة إلى (C) .

(II) برهن حسابيا على صحة النتائج السابقة.

التمرين 19 :

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أنه من أجل كل x من مجموعة التعريف D_f فإن : $f'(x) = \frac{x^3(x-3)}{(x-1)^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 8 + \frac{5}{x - 2}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 8)(x - 2) + 5}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 7)}{(x - 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 7}{x - 2} = -4$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 3 حيث $f'(3) = -4$.

$$f(x) = \sqrt{5 - x} ; D_f =]-\infty ; 5]$$

لدينا : $f(0) = \sqrt{5}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}][\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}]}{x [\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - x - 5}{x [\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x [\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}]}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 حيث : $f'(0) = \frac{-\sqrt{5}}{10}$

$$f(x) = \sqrt{8x^2 - 10x + 3} ; x_0 = \frac{3}{4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 8x^2 - 10x + 3 \geq 0\}$$

ندرس إشارة : $8x^2 - 10x + 3$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(8)(3) = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{10 - 2}{16} = \frac{1}{2} ; x_2 = \frac{10 + 2}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

الحلول

التمرين 1 :

<input type="checkbox"/> (5	<input type="checkbox"/> (4	<input type="checkbox"/> (3	<input type="checkbox"/> (2	<input type="checkbox"/> (1
<input type="checkbox"/> (10	<input type="checkbox"/> (9	<input type="checkbox"/> (8	<input type="checkbox"/> (7	<input type="checkbox"/> (6
	<input type="checkbox"/> (13	<input type="checkbox"/> (12	<input type="checkbox"/> (11	

التمرين 2 :

دراسة قابلية الاشتقاق عند $x_0 = 2$ (1) $f(x) = x^3 - x^2 + 4$;

لدينا : $f(2) = 8$ و $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + 4 - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + x + 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 2) = 8$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 حيث $f'(2) = 8$

$$f(x) = x + 3 + \frac{5}{x - 2} ; x_0 = 3$$

$$f(3) = 11 ; D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3 + \frac{5}{x - 2} - 11}{x - 3}$$

كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-4+2x+4}{x+2} ; x \geq 4 \\ f(x) = \frac{-x+4+2x+4}{x+2} ; x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x}{x+2} ; x \geq 4 \\ f(x) = \frac{x+8}{x+2} ; x \leq 4 \end{cases} \quad \text{وعليه :}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\frac{3x}{x+2} - 2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x - 2x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 4 من اليمين.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{x+8}{x+2} - 2}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x + 8 - 2x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x + 4}{(x + 2)(x - 4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(x - 4)}{(x - 2)(x - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x + 2} = \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 4 من اليسار لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 4.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$8x^2 - 10x + 3$	+	○	○	+

$$\text{وبالتالي : } D_f = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{4} ; +\infty \right[$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $\frac{3}{4}$ لأنه لا ينتمي إلى مجال مفتوح معرفة عنده الدالة f .

لندرس قابلية الاشتقاق عند $\frac{3}{4}$ من اليمين :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{4}\right)}{x - \frac{3}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{\sqrt{8x^2 - 10x + 3} \times \sqrt{8x^2 - 10x + 3}}{\left(x - \frac{3}{4}\right) \sqrt{8x^2 - 10x + 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}^+} \frac{8 \left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{8x^2 - 10x + 3}} = +\infty \end{aligned}$$

وعليه f لا تقبل الاشتقاق عند $\frac{3}{4}$ من اليمين.

$$f(x) = \frac{|x-4| + 2x + 4}{x+2} ; x_0 = 4 \quad (5)$$

لدينا : $f(4) = 2$; $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 6 - 4x + 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 10}{(x - 4)^2} = -\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 4 من اليسار و عليه f لا تقبل الاشتقاق عند 4 .

التمرين 3 :

(1) استنتاج $f'(6)$ و $f'(-6)$:

$$f'(6) \text{ هو ميل المماس } (\Delta) \text{ ومنه : } f'(6) = \frac{3-0}{9-6} \quad \text{إذن : } f'(6) = 1$$

$$f'(-6) \text{ هو ميل المماس } (D) \text{ ومنه : } f'(-6) = \frac{8-0}{0-(-6)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

(2) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x - 6} = f'(6) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -6} \frac{f(x) - f(-6)}{x - (-6)} = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{f(x)}{x + 6} = f'(-6) = \frac{4}{3}$$

$$(\Delta) : y = f'(6) \times (x - 6) + f(6) \quad : (\Delta) \text{ كتابة معادلة}$$

$$(\Delta) : y = x - 6$$

$$(D) : y = f'(-6) \times (x + 6) + f(-6) \quad : (D) \text{ كتابة معادلة}$$

$$(D) : y = \frac{4}{3}x + 8$$

التمرين 4 :

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x \quad \text{لدينا (1)}$$

$$f'(x) = 3x^3 - 5x + 1 \quad D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-4} ; x \geq 4 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3x - 6}{x - 4} ; x < 4 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = x - \sqrt{x-4} \quad : x \geq 4 \quad \text{لدينا من أجل}$$

$$x - 4 \geq 0 \quad \text{وعليه : } x \in [4 ; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 6}{x - 4} \quad : x < 4 \quad \text{ومن أجل}$$

$$x - 4 \neq 0 \quad \text{وعليه : } x \in]-\infty ; 4[$$

$$D_f =]4 ; +\infty[\cup]-\infty ; 4[\quad \text{وبالتالي مجموعة تعريف الدالة } f :$$

$$\text{إذن : } D_f = \mathbb{R}$$

$$f(4) = 4 - \sqrt{4-4} = 4 \quad \text{ولدينا :}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{x-4} - 4}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 - \frac{\sqrt{x-4}}{x-4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x-4}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 4 من اليمين.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x^2 - 3x - 6}{x - 4} - 4}{x - 4}$$

$$.D_f =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$.D_{f'} =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$.f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - 1(\sqrt{x}-4)}{(x-1)^2} = \frac{-x+8\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$.f(x) = (\sqrt{x}-3)^2 : \text{لدينا (7)}$$

$$.D_f = [0 ; +\infty[; D_{f'} =]0 ; +\infty[: \text{ومنه}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x}-3) = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

$$.f(x) = \sqrt{2x-3} + x : \text{لدينا (8)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x-3 \geq 0\} : \text{ومنه}$$

$$.D_{f'} = \left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[; D_f = \left[\frac{3}{2} ; +\infty \right[: \text{إذن}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} + 1 = \frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}}$$

$$.f(x) = \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}} : \text{لدينا (9)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x-2 \geq 0 ; x+3 > 0\} : \text{ومنه}$$

$$.D_{f'} =]1 ; +\infty[; D_f = [1 ; +\infty[: \text{إذن}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-2}} \times \sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \times \sqrt{2x-2}}{x+3}$$

$$.f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{5}{x} + 2 : \text{لدينا (2)}$$

$$.D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1 ; 0\} : \text{ومنه}$$

$$.f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} + \frac{5}{x^2}$$

$$.f(x) = \frac{4x}{x^2-1} + 5x : \text{لدينا (3)}$$

$$.D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} : \text{ومنه}$$

$$.f'(x) = \frac{-4x^2-4}{(x^2-1)^2} + 5 = \frac{5x^4-14x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$$.f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} : \text{لدينا (4)}$$

$$.f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} ; D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\} : \text{ومنه}$$

$$.f(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)^2 : \text{لدينا (5)}$$

$$.D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{-2\} : \text{ومنه}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{3(x+2)-1(3x-1)}{(x+2)^2} \times \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{(7) \times (3x-1)}{(x+2)^3} = \frac{14(3x-1)}{(x+2)^3}$$

$$.f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-1} : \text{لدينا (6)}$$

$$.D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 ; x-1 \neq 0\} : \text{ومنه}$$

(12) لدينا : $f(x) = \sin^4 x$ ، ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4 \cos x \cdot \sin^3 x$

(13) لدينا : $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - 1 \neq 0\}$

$\sin x - 1 = 0$ معناه : $\sin x = 1$ وعليه : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

إذن : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z} \right\}$

$f'(x) = \frac{-\sin x (\sin x - 1) - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x - 1)^2}$

$f'(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin x}{(\sin x - 1)^2}$

$f'(x) = \frac{-1 + \sin x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1}$

(14) لدينا : $f(x) = \sqrt{2\sin^2 x + 1}$

ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2\sin^2 x + 1 \geq 0\}$

$2\sin^2 x + 1 \geq 0$ معناه : $\sin^2 x \geq -\frac{1}{2}$

وهذا محقق ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{4\cos x \sin x}{\sqrt{2\sin^2 x + 1}} = \frac{2\cos x \sin x}{\sqrt{2\sin^2 x + 1}}$

(15) لدينا : $f(x) = \tan x - \sin x + 1$

ومنه : $D_f = D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$

$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-2}} - \frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}{x+3}$

ومنه : $f'(x) = \frac{8}{2(x+3)\sqrt{2x-2}\sqrt{x+3}}$

(10) لدينا : $f(x) = \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}$

ومنه : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-2}{x+3} \geq 0 ; x+3 \neq 0 \right\}$

$D_f =]-\infty ; -3[\cup [1 ; +\infty[$

$D_{f'} =]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{\frac{2(x+3) - 1(2x-2)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}} = \frac{\frac{8}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}$

ومنه : $f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2 \sqrt{\frac{2x-2}{x+3}}}$

(11) لدينا : $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$

ومنه : $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2 \times \left[-\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \right] + 2 \cos 2x$

إذن : $f'(x) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cos 2x$

$$f(0) = 2(0)^2 - 4 + 4 |0 + 3| = -4 + 12 = 8$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x + 8 - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(x + 2) = 4$$

ومنه f تقبل الاشتقاق عند 0 حيث $f'(0) = 4$.

(3) قابلية الاشتقاق عند -3 :

$$f(-3) = 2(-3)^2 - 4 + 4 |-3 + 3| = 14$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - 4x - 16 - 14}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - 4x - 30}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(2x - 10)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (2x - 10) = -16$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 4x + 8 - 14}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(2x - 2)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} 2x - 2 = -8$$

وعليه f لا تقبل الاشتقاق عند -3.

التمرين 7 :

تبسيط $f(x)$:

$$\mathbb{R} - \{-2\} : \text{معرف على } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 (x + 2)^2}}{(x + 2)(|x| + 2)} \quad x \neq -2$$

$$\text{لكن : } f(-2) = \frac{1}{2} \quad \text{ومنه : } D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|x| \cdot |x + 2|}{(x + 2) \cdot (|x| + 2)} \quad \text{إن :}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} : \text{معناه } \cos x = 0$$


$$\bullet D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\} : \text{إن :}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x$$


التمرين 5 :

استنتاج اتجاه تغير كل من الدالتين f و g :

• من جدول التغيرات: الدالة f' موجبة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -3]$ و $[-3 ; +\infty[$ ومنه f متزايدة تماما على كل من هذين المجالين.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

• من جدول تغيرات g' نلاحظ أن $g'(x)$ سالبة على كل من المجالين $]-\infty ; 1]$ و $[1 ; +\infty[$ ومنه g متناقصة تماما على كل من هذين المجالين.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$		

التمرين 6 :

$$D_f = \mathbb{R} \quad (1)$$

• كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 4 + 4(x + 3) ; x \geq -3 \\ f(x) = 2x^2 - 4 - 4(x + 3) ; x < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4x + 8 ; x \geq -3 \\ f(x) = 2x^2 - 4x - 16 ; x < -3 \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

(2) قابلية الاشتقاق عند 0 :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} ; f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} ; f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{(-1)^3 \times 3 \times 2 \times 1}{(x-1)^4} \quad \text{ومنه:}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{+24}{(x-1)^5} = \frac{(-1)^4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(x-1)^5}$$

استنتاج $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{نلاحظ أن:}$$

التمرين 9:

حساب $f^{(5)}(x) ; f^{(4)}(x) ; f^{(3)}(x) ; f''(x) ; f'(x)$

$$f'(x) = \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin (\pi + x)$$

$$f'''(x) = \sin \left(\frac{2\pi}{2} + x \right)$$

$$f^{(3)}(x) = \cos x (\pi + x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi + x \right)$$

$$f^{(3)}(x) = \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + x \right)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin \left(\frac{4\pi}{2} + x \right)$$

لدينا

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	-x	-x	x	
x+2	-(x+2)	x+2	x+2	

وبالتالي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x [-(x+2)]}{(x+2)(-x+2)} ; x \leq -2 \\ f(x) = \frac{-x(x+2)}{(x+2)(-x+2)} ; -2 < x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+2)(x+2)} ; x \geq 0 \\ f(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{-x+2} ; x < -2 \\ f(x) = \frac{x}{x-2} ; -2 < x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x+2} ; x \geq 0 \\ f(-2) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

(1) دراسة استمرارية الدالة f عند -2:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{-x+2} = \frac{-1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2}$$

إذن f لا تقبل نهاية عند -2 ومنه f غير مستمرة عند -2.

2- قابلية الاشتقاق عند -2:

بما أن f غير مستمرة عند -2 فإن f غير قابلة للاشتقاق عند -2.

التمرين 8:

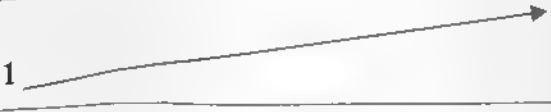
حساب $f^{(4)}(x)$:

(2) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

من جدول تغيرات الدالة f' نلاحظ أن : $f'(x) \geq 0$.

وعليه f متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

التمرين 12 :


(1) دراسة اتجاه تغير f' :

$f'(x) = -\sin x + x$ وعليه : $f''(x) = -\cos x + 1$.

لدينا : $-1 \leq \cos x \leq 1$. ومنه : $-1 \leq -\cos x \leq 1$.

وبالتالي : $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$.

ومنه : $f''(x) \geq 0$ وعليه الدالة f' متزايدة تماما على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

لدينا : $f'(x) = 0$ وعليه :

لما $f'(x) > 0 : x \in]0 ; +\infty[$

لما $f'(x) < 0 : x \in]-\infty ; 0[$

$$f^{(5)}(x) = \cos \left(\frac{4\pi}{2} + x \right)$$

$$f^{(5)}(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} + x \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{2} + x \right)$$

استنتاج : لدينا مما سبق : $f^{(n)}(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{2} + x \right)$

التمرين 10 :

- نبيان أن : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$

لدينا : $f(x) = \sin^2 x$ ومنه : $f'(x) = 2 \cos x \cdot \sin x$

وبالتالي : $f''(x) = 2 [-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x]$

$$= 2 (-\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ومنه : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 2 (-\sin^2 x + \cos^2 x) + 4\sin^2 x - 2$

$$= 2 (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2 = 2 - 2 = 0$$

التمرين 11 :

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f' :


لدينا : $f'(x) = 2x - \sin x$ ومنه : $f''(x) = 2 - \cos x$

بما أن : $-1 \leq -\cos x \leq 1$ فإن : $1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

ومنه : $1 \leq f''(x) \leq 3$.

وعليه : $f''(x) > 0$ إذن f' متزايدة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$		

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -1 - \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$-2x^2 - 4x + 4$	-	0	0	-

إذن إشارة المشتق على $[-2; 2]$:

x	-2	$-1 + \sqrt{3}$	2
$f'(x)$	+	0	-

جدول التغيرات :

x	-2	$-1 + \sqrt{3}$	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(-1 + \sqrt{3})$	0

$$f(-1 + \sqrt{3}) = (-1 + \sqrt{3} + 4)\sqrt{4 - (-1 + \sqrt{3})^2} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{2}\sqrt{3}$$

(2) معادلة المماس (Δ) :

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0) \quad \text{لدينا :}$$

$$x_0 = 0 \quad ; \quad f(0) = 8 \quad ; \quad f'(0) = 2 \quad \text{حيث :}$$

$$\therefore y = 2(x - 0) + 8 \quad \text{و بالتالي :}$$

$$y = 2x + 8 \quad \text{ومنه معادلة } (\Delta) \text{ هي :}$$

1) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المماس (Δ) :

$$f(x) - y = (x + 4)\sqrt{4 - x^2} - 2(x + 4)$$

$$= (x + 4) \left[\sqrt{4 - x^2} - 2 \right]$$

وبالتالي f متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		0	

(3) الاستنتاج :

من جدول التغيرات لدينا : $f(x) \geq 0$.

$$\text{ومنه : } \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$$

$$\text{وعليه : } \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

التمرين 13 :

(1) دراسة تغيرات الدالة f :

$$\text{لدينا : } f(2) = 0 \quad ; \quad f(-2) = 0$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \times (x + 4)$$

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x(x + 4)}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{4 - x^2 - x^2 - 4x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 4x + 4}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{إشارة المشتق من إشارة : } -2x^2 - 4x + 4$$

$$\Delta' = (-2)^2 - (4)(-2) = 4 + 8 = 12 \quad \text{لدينا :}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = -1 + \sqrt{3} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{aligned}(fog)'(x) &= g'(x) \times f'[g(x)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(\sqrt{x})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (x+1)}\end{aligned}$$

التمرين 15 :
(1-) دراسة تغيرات g :

- $D_f =]-\infty ; +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$
- $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$	

$$. g(-1) = -2 ; g(1) = -6$$

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا :

لدينا g مستمرة في المجال $\left[2 ; \frac{5}{2}\right]$ ومتزايدة تماما و لدينا :

$$\begin{aligned}&= \frac{(x+4) \left[\sqrt{4-x^2} - 2 \right] \left[\sqrt{4-x^2} + 2 \right]}{\sqrt{4-x^2} + 2} \\ &= \frac{(x+4)(4-x^2-4)}{\sqrt{4-x^2} + 2}\end{aligned}$$

$$f(x) - y = \frac{-x^2(x+4)}{\sqrt{4-x^2} + 2} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\text{بما أن : } x^2 \geq 0 \text{ و } \sqrt{4-x^2} + 2 > 0$$

فإن إشارة $f(x) - y$ تتعلق بإشارة $-(x+4)$

و هو سالب على المجال $[-2 ; 2]$

إذن (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة المعدومة و يكون تحت (C) .

التمرين 14 :

$$(1) \text{ لدينا : } g'(x) = -\sin x$$

$$(fog)'(x) = g'(x) \times f'[g(x)]$$

$$\text{ومنه : } (fog)'(x) = -\sin x \times \frac{1}{[g(x)]^2 + 1}$$

$$(fog)'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x + 1} \quad \text{وبالتالي}$$

$$(2) \text{ لدينا : } g'(x) = 5$$

$$(fog)'(x) = g'(x) \times f'[g(x)]$$

$$= 5 \times \frac{1}{[g(x)]^2 + 1} = \frac{5}{(5x-3)^2 + 1}$$

$$(3) \text{ لدينا : } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+2)}{x^2-1} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow +1 \\ x^2-1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+2)}{x^2-1} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow 1 \\ x^2-1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x+2)}{x^2-1} = -\infty$$

$$\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow 3 \\ x^2-1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x+2)}{x^2-1} = +\infty$$

$$\begin{cases} x^2(x+2) \longrightarrow 3 \\ x^2-1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

2- تعيين الأعداد a, b, c, d :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{(ax + b)(x^2 - 1) + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{ax^3 - ax + bx^2 - b + cx + d}{x^2 - 1}$$

$$g(2) = -2 ; g\left(\frac{5}{2}\right) = 4,125$$

$$.g(2) \times g\left(\frac{5}{2}\right) < 0 \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α حيث :

$$.g(\alpha) = 0 \quad \text{ويحقق} \quad \alpha \in \left]2 ; \frac{5}{2}\right[$$

(3) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
g(x)	-	○	+

(II-1) تعيين مجموعة التعريف :

$$.D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$\text{ومنه : } .D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

- حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x+2)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

إشارة : $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	○	○	+

ويكون (Δ) تحت (C) في كل من المجالين $|2; 1|$ و $|+\infty; 1|$.

5- تبين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

و عليه : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

و عليه : $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي .

6- تبين أن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة $x \cdot g(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x \cdot (x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x [(3x + 4)(x^2 - 1) - 2(x^3 + 2x^2)]}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x (3x^3 - 3x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x (x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

بما أن : $(x^2 - 1)^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق بالعبارة :

$x (x^3 - 3x - 4)$ أي بالعبارة $x \cdot g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ تكون كما يلي :

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
x	-	-	0	+	+	+
$g(x)$	-	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	+	0	-	-	+

$$= \frac{ax^3 + bx^2 + (c - a)x - b + d}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \quad \text{لكن :}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{أي أن :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c - a = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases} \quad \text{و عليه :}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1} \quad \text{و بالتالي :}$$

3- تبين أن (C) تقبل مستقيما مقاربا مائلا :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

فإن معادلة المستقيم المقارب (Δ) هي : $y = x + 2$.

4- دراسة الوضعية النسبية لـ (Δ) و (C) :

$$f(x) - y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

الإشارة :

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+	+
$x^2 - 1$	+	+	0	-	+
$f(x) - y$	-	0	+	-	+

و عليه (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة 2-

ويكون (Δ) فوق (C) في كل من المجالين $]-\infty; -2]$ و $]1; +\infty[$.

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1} & ; x^2 - 3x \geq 0 \\ f(x) = -\frac{x^2 - 3x}{x+1} & ; x^2 - 3x \leq 0 \end{cases}$$

لكن إشارة $(x^2 - 3x)$ كما يلي :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x^2 - 3x$	$+$	0	$-$	$+$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1} & ; x \in D_1 \\ f(x) = -\frac{(x^2 - 3x)}{x+1} & ; x \in D_2 \end{cases}$$

وعليه :

حيث : $D_1 =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0] \cup [3 ; +\infty[$

و $D_2 = [0 ; 3]$

(3) كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad \text{لما } x \in D_1$$

$$= \frac{(ax + b)(x+1) + c}{x+1}$$

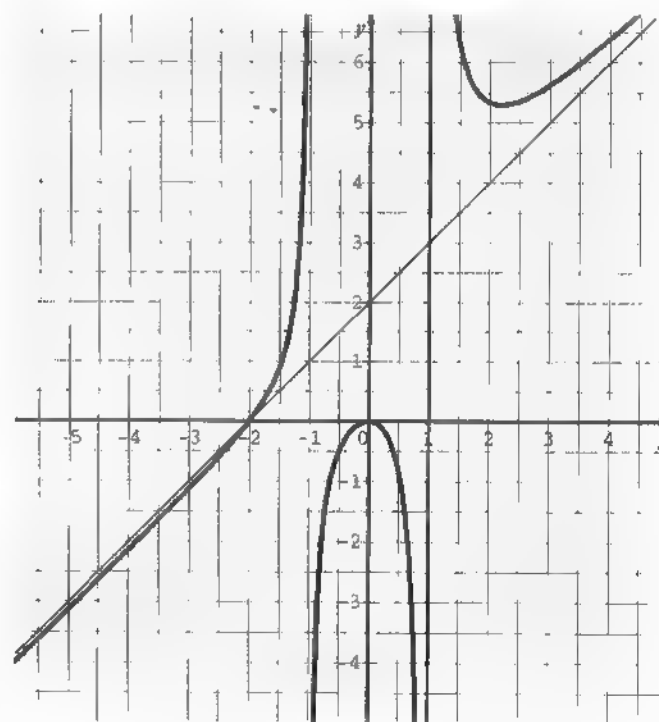
$$= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{اي أن :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b + c = 0 \end{cases} \quad \text{وعليه :}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

8- إنشاء (C) باستعمال البرمجية : **Sine qua non**



التمرين 16 :

(1) مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$$

(2) كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

و عليه نستنتج أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

$$: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{h} \quad \text{حساب (9)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3(3+h)}{3+h+1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+6h+h^2-9-3h}{h(h+4)} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+3h}{h(4+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+3)}{h(4+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+3}{h+4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3(3+h)}{3+h+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+3}{h+4} = \frac{3}{4}$$

و عليه f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

(6) دراسة تغيرات الدالة f :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(x - 4 + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(x - 4 + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow -1} f(x) = \lim_{h \rightarrow -1} \left(x - 4 + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow -1} f(x) = \lim_{h \rightarrow -1} \left(x - 4 + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \quad : x \in D_f$$

$$= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{cases} \quad \text{أي أن :} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a+b = +3 \\ b+c = 0 \end{cases} \quad \text{و عليه :}$$

$$\begin{cases} f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1} & ; x \in D_1 \\ f(x) = -x + 4 - \frac{4}{x+1} & ; x \in D_2 \end{cases} \quad \text{و عليه :}$$

$$: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{حساب (4)}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2-3x}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x+1} = -3 \end{aligned}$$

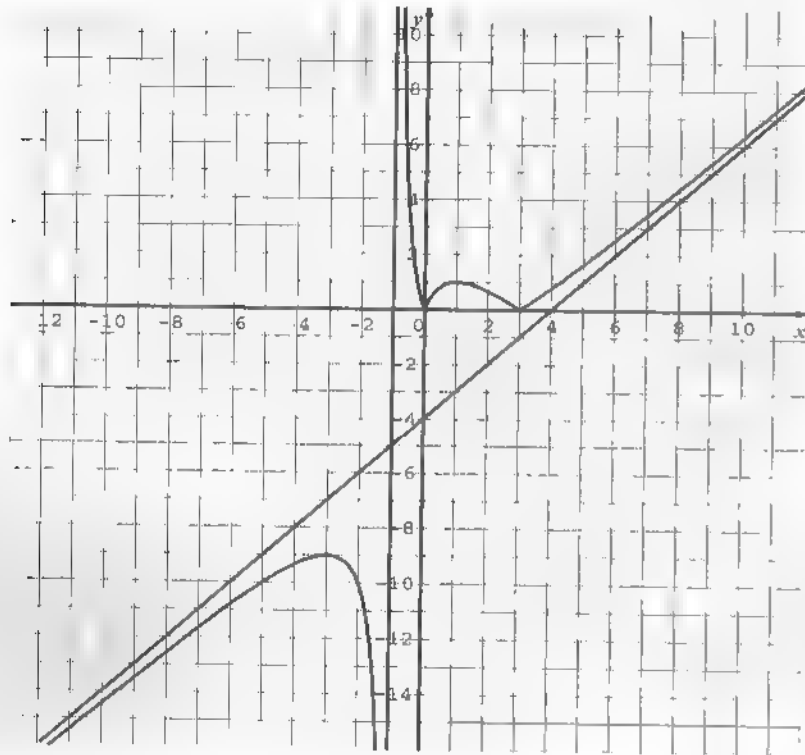
$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-(x^2-3x)}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(x-3)}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-3)}{x+1} = 3 \end{aligned}$$

تبيان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل :

$$\bullet \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 4)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 1} = 0$$

ومنه $y = x - 4$ معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) .

(8) إنشاء (Δ) و (C) :



(9) المناقشة البيانية :

$$f(x) = m \quad \text{ومنه} \quad m = \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \quad \text{لدينا} \quad |x^2 - 3x| = m(x + 1)$$

- لما : $m \in]-\infty ; -9[$ للمعادلة حلين متمايزين .
- لما : $m = -9$ للمعادلة حل مضاعف . لما : $m \in]-9 ; 0[$ ليس للمعادلة حلول .
- لما : $m = 0$ للمعادلة حلين متمايزين . لما : $m \in]0 ; 1[$ للمعادلة 4 حلول .

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} \quad : x \in D_1 \text{ لما } -$$

$$f'(x) = \frac{[(x+1) - 2] [(x+1) + 2]}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} \quad \text{ومنه} :$$

x	$-\infty$	-3	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-		+

وعليه f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -3[$ و $[3 ; +\infty[$

ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-3 ; -1[$ و $]-1 ; 0[$.

$$f'(x) = \frac{-(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} \quad : x \in D_2 \text{ لما } -$$

إذن :

x	0	1	3
$f'(x)$	+	0	-

وعليه f متزايدة تماما على المجال $[0 ; 1]$.

و متناقصة تماما على المجال $[1 ; 3]$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-3	-1	0	1+	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\searrow	$+\infty$	\searrow	\nearrow	$+\infty$

وعليه : $f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} = -\infty$$

• دراسة إشارة المشتق :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة جداء كل من :

$$x^2 + x + 1 \text{ و } x + 2 \text{ و } x + 1$$

إشارة : $x^2 + x + 1$:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0 \text{ وعليه : } x^2 + x + 1 > 0$$

ومنه :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+	+
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+
$(x + 1)^3$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	+	+

• لما : $m = 1$ للمعادلة 3 حلول أحدهما مضاعف (و هو 1) .

• لما : $m \in]1 ; +\infty[$: للمعادلة حلين متمايزين .

- حل المعادلة من أجل $m = 1$: $f(x) = 1$

$$\text{أي : } \frac{|x^2 - 3x|}{x + 1} = 1 \text{ ومنه : } |x^2 - 3x| = x + 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x + 1 ; x \in D_1 \\ -(x^2 - 3x) = x + 1 ; x \in D_1 \end{cases} \text{ وعليه :}$$

• حل المعادلة : $x^2 - 3x = x + 1$. ومنه : $x^2 - 4x - 1 = 0$ لدينا :

$$\Delta' = (-2)^2 - (-1)(1) = 5 \text{ ومنه } x_1 = 2 - \sqrt{5} ; x_2 = 2 + \sqrt{5}$$

• حل المعادلة : $-(x^2 - 3x) = x + 1$ - ومنه : $-x^2 + 3x - x - 1 = 0$

أي : $-x^2 + 2x - 1 = 0$ ومنه : $-(x - 1)^2 = 0$ للمعادلة حل مضاعف هو 1 . وعليه

$$S = \{ 2 - \sqrt{5} ; 2 + \sqrt{5} ; 1 \}$$

التمرين 17 :

(1) تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0 \}$$

ومنه : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)^3} \text{ (2) تبين ان :}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2(x+2)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)^3 + 2}{(x+1)^3} \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{2[(x+1)^3 + 1]}{(x+1)^3} = \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^3}$$

ومنه : $f\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{16}{9} = \frac{13}{18}$

وعليه : $f\left(\frac{-3}{8}\right) \times f\left(\frac{-1}{4}\right) < 0$

ومنه يوجد عدد وحيد $x_0 \in \left[\frac{-3}{8} ; \frac{-1}{4}\right]$ بحيث : $f(x_0) = 0$

إنّ للمعادلة حل وحيد.

(6) كتابة معادلة المماس :

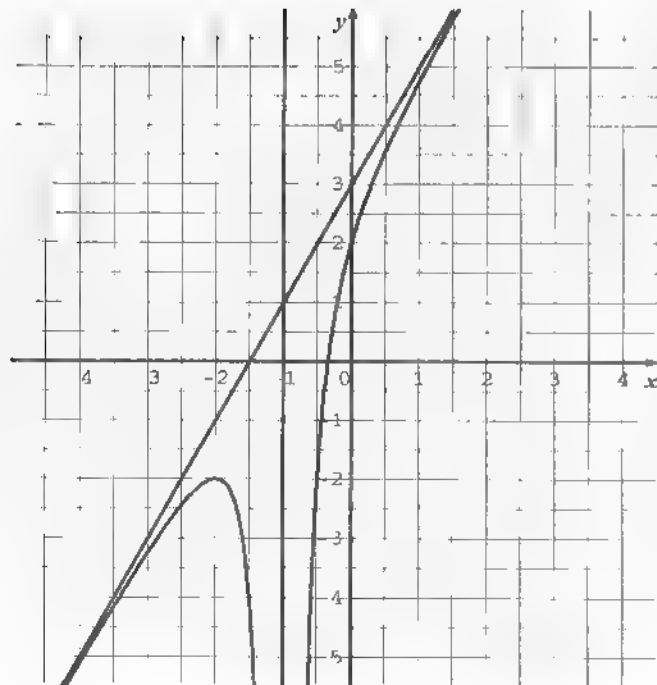
لدينا : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$

لكن : $f(0) = 2$; $f'(0) = 4$

ومنه : $y = 4x + 2$

(7) إنشاء (C) :

لدينا : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب .



ومنه الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty ; -2]$ و $]-1 ; +\infty[$.

ومتناقصة تماماً على $[-2 ; -1]$

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(4) تبيان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x + 1)} = 0$$

وعليه (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C).

(5) تبيان أن (C) يقطع محور الفواصل :

في المجال $\left[\frac{-3}{8} ; \frac{-1}{4}\right]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً .

لدينا :

$$f\left(\frac{-8}{3}\right) = 2 \left(\frac{-8}{3}\right) + 3 - \frac{1}{\left(\frac{-8}{3} + 1\right)^2}$$

$$= \frac{-3}{4} + 3 - \frac{1}{\left(\frac{-8}{3}\right)^2}$$

ومنه : $f\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{9}{4} - \frac{64}{25} = \frac{-31}{100}$

لدينا :

$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = 2 \left(\frac{-1}{4}\right) + 3 - \frac{1}{\left(\frac{-1}{4} + 1\right)^2} = \frac{-1}{2} + 3 - \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

(8) تعيين النقط من (C) التي احداثياتها أعدادا صحيحة :

لتكن $M(x; y)$ نقط من (C) إحداثياتها صحيحة .

لدينا : $y = f(x)$ حيث x صحيحة و y صحيح .

ومنه : $2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$ عدد صحيح وبالتالي : $(x+1)^2$ يقسم 1

إذن : $(x+1)^2 = 1$ وبالتالي : $x+1 = 1$ أو $x+1 = -1$

إذن : $x = 0$ أو $x = -2$.

إذن النقط التي احداثياتها صحيحة هي $A(0; 2)$ ، $B(-2; -2)$.

(9) المناقشة البيانية للمعادلة :

لدينا : $2x^3 + (7-m)x^2 + 2(4-m)x + 2 - m$

إذن : $2x^3 + 7x^2 - mx^2 + 8x - 2mx + 2 - m = 0$

وعليه : $2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = mx^2 + 2mx + m$

وعليه : $2x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = m(x^2 + 2x + 1)$

وعليه : $\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2} = m$

لكن : $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$ أي : $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$

وعليه : $f(x) = m$

لما $m \in]-\infty; -2]$: للمعادلة 3 حلول متميزة .

لما $m = -2$: للمعادلة حلين أحدهما مضاعف .

لما $m \in]-2; +\infty[$: للمعادلة وحيد .

التمرين 18:

$D_f = \mathbb{R}$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ ومتزايدة تماما على

المجال $[1; +\infty[$.

(2) للمستقيم الذي معادلته : $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C) .

(3) النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ •

(4) معادلة المستقيم المقارب المائل :

المستقيم المقارب المائل الأول يشمل النقطة $A(0; -1)$ وميله 1 . إذن معادلته

هي : $y = x - 1$. البيان (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل .

المستقيم المقارب المائل الثاني يشمل النقطة $A'(0; 1)$ وميله -1 .

إذن معادلته هي : $y = -x + 1$. البيان (C) يقع فوق المستقيم المقارب المائل .

(II) البرهان الحسابي : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

• مجموعة التعريف :

لدينا : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 \geq 0\}$

ندرس إشارة : $x^2 - 2x + 2$.

$\Delta' = (-1)^2 - 2(1) = -1$ وعليه : $x^2 - 2x + 2 > 0$

وعليه : $D_f = \mathbb{R}$

• النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} = +\infty$

• المشتق : $f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

• إشارة المشتق :

من أجل $x = 1$: $f'(x) = 0$.

من أجل $x > 1$: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} \quad \text{ومنه:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[-2 + \frac{2}{x}\right]}{x \left[\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -1$$

ومنه: $y = x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} \quad \text{- لدينا:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x][\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x]}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x}$$

من أجل $x < 1$: $f'(x) < 0$ وعليه f ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1]$.

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

• تبين أن المستقيم الذي معادلته $x = 1$ محور تناظر:

$$\text{لدينا: } y = f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$$

$$\text{وبوضع: } \begin{cases} x-1 = x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{نجد: } y' = \sqrt{x'^2 + 1}$$

$$\text{نضع: } y' = g(x') \quad \text{ومنه: } D_g = \mathbb{R}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $g(-x') = g(x')$ أي g دالة زوجية.

وعليه $x = 1$ معادلة محور تناظر لبين الدالة f .

• معادلة المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}{x} \quad \text{- لدينا:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x][\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x]}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x} \end{aligned}$$

(2) تبين أنه يمكن كتابة f على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{(ax + b)(x-1)^2 + cx + d}{(x-1)^2} \quad \text{إن :}$$

$$= \frac{(ax + b)(x^2 - 2x + 1) + cx + d}{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + cx + d}{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{ax^3 + (-2a + b)x^2 + (a - 2b + c)x + b + d}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} \quad \text{أي أن :} \quad \begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ b + d = -4 \end{cases} \quad \text{وعليه :}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} \quad \text{ومنه :}$$

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[-2 + \frac{2}{x} \right]}{x \left[-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 \right]} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = 1$$

ومنه : $y = -x + 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

التمرين 19 :

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \quad \text{تبين أن :}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{[(x+1)^2]^2}$$

$$= \frac{(x-1)[(3x^2 - 8x + 8)(x-1) - 2(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 8x + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x+1)^3} \quad \text{وعليه :}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f(x)-y	-	-	0	+

إذن (C) يقطع تحت (Δ) في كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]\frac{3}{2}; +\infty[$

و (C) يقطع فوق (Δ) في المجال $]\frac{3}{2}; +\infty[$

و (Δ) يقطع (C) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$

(5) تبين وجود α :

في المجال $]\frac{2}{3}; \frac{3}{4}[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً .

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - 2 + \frac{3\left(\frac{2}{3}\right) - 2}{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2} = \frac{-4}{3} + 0 = \frac{-4}{3} \quad \text{ولدينا :}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - 2 + \frac{3\left(\frac{3}{4}\right) - 2}{\left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = \frac{-5}{4} + \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{-5}{4} + \frac{1}{4} \times 16 = \frac{-5}{4} + 4 = \frac{11}{4}$$

$$\text{ومنه : } f\left(\frac{2}{3}\right) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α

$$\text{حيث } f(\alpha) = 0 \text{ و } \alpha \in \left]\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right[$$

(6) - معادلة المماس :

$$y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$$

$$\text{حيث : } f(2) = 4 \quad ; \quad f'(2) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} \right) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x - 3)}{(x - 1)^2} \quad \text{إشارة المشتق :}$$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$(x - 1)^3$	-	-	0	+	+
$f'(x)$	+	+	-	+	+

إذن f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]\frac{3}{2}; +\infty[$

و متناقصة تماماً على المجال $]\frac{3}{2}; 3[$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	+	+
f(x)	$-\infty$	\nearrow	\nearrow	\searrow	\nearrow
		-4	$+\infty$	$\frac{11}{4}$	$+\infty$

(4) تبين أن (C) يقبل مستقيمين مقاربين :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

وعليه : $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي .

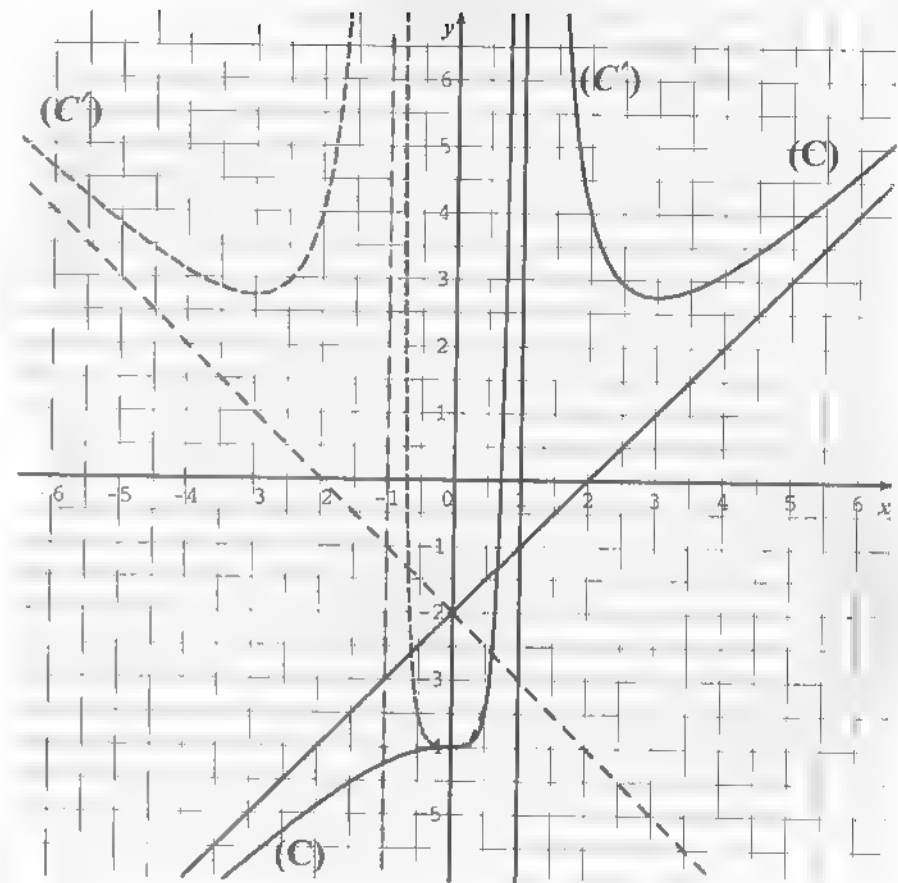
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = 0 \quad \text{ولدينا :}$$

وعليه معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) هي : $y = x - 2$.

$$f(x) - y = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} \quad \text{الوضعية النسبية لـ } (\Delta) \text{ و } (C) :$$

ومنه : $y = -4(x - 2) + 4$
وبالتالي : $y = -4x + 12$

- إنشاء (C) :



(7) المناقشة البيانية للمعادلة :

$$f(x) = 2m$$

بوضع $2m = \alpha$ أي $m = \frac{\alpha}{2}$ نجد : $f(x) = \alpha$

• لما $\alpha \in]-\infty; -4[$ أي $m \in]-\infty; -2[$ فإن للمعادلة حل وحيد.

• لما $\alpha = -4$ أي $m = -2$: للمعادلة حل مضاعف.

• لما $\alpha \in]-4; \frac{11}{4}[$ أي $m \in]-2; \frac{11}{8}[$: للمعادلة حل وحيد.

• لما $\alpha = \frac{11}{4}$ أي $m = \frac{11}{8}$ للمعادلة حلين أحدهما مضاعف.

• لما $\alpha \in]\frac{11}{4}; +\infty[$ أي $m \in]\frac{11}{8}; +\infty[$ للمعادلة ثلاثة حلول متميزة.

(8) - تعيين D_g :

لدينا : $D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\}$

$|x| - 1 = 0$ معناه : $|x| = 1$ ومنه : $x = 1$ أو $x = -1$

وبالتالي : $D_g = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

- نبين أن دالة زوجية :

من أجل كل عدد حقيقي x من D_g : $-x \in D_g$ ولدينا :

$$g(-x) = g(x) \quad \text{ومنه} \quad g(-x) = |-x| - 2 + \frac{3|-x| - 2}{(|-x| - 1)^2}$$

إن دالة زوجية .

- استنتاج رسم (C') :

$$\begin{cases} g(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} & ; x \geq 0 \\ g(x) = -x - 2 + \frac{-3x - 2}{(-x - 1)^2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا :

إن لما $x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[$: $g(x) = f(x)$

وعليه (C') ينطبق على (C) أما الجزء المتبقي من (C') فهو نظير الجزء الذي رسم بالنسبة لمحور الترتيب.

4- الدوال الأصلية لدالة

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I . نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة F تقبل الاشتقاق على I بحيث من أجل كل قيمة x من I فإن : $F'(x) = f(x)$.

مثال :

الدالة : $F : x \mapsto \sqrt{x}$

هي دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

لأن : $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

مبرهنة :

كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دوال أصلية على I .

خاصية 1 :

لتكن F دالة أصلية لدالة f على مجال I

• الدالة : $F(x) + k$ حيث k عدد حقيقي كفي هي أيضا دالة أصلية

للدالة f .

• إذا كانت G دالة أصلية أخرى للدالة f فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل

قيم x فإن $G(x) = F(x) + k$.

خاصية 2 :

لكل دالة مستمرة على مجال I دالة أصلية وحيدة تأخذ قيمة معينة y_0 من أجل كل قيمة معلومة

x_0 من I .

- عمليات على الدوال الأصلية :

ليكن I مجال من \mathbb{R} و x متغير حقيقي.

ملاحظات	دالتها الأصلية معرفة ب :	الدالة المعرفة ب :
C ثابت حقيقي	$g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$
$x \neq 0$	$g(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
$x > 0$ $x \in I$	$g(x) = 2\sqrt{x} + C$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x \in I$
	$g(x) = -\cos x + C$	$f(x) = \sin x$
	$g(x) = \sin x + C$	$f(x) = \cos x$
$\cos x \neq 0$; $x \in I$	$g(x) = \tan x + C$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $x \in I$
	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$	$f' f''$
$f(x) \neq 0$ $x \in I$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + C$	$\frac{f'(x)}{f^n(x)}$; $x \in I$
$f(x) > 0$ $x \in I$	$\sqrt{f(x)} + C$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$; $x \in I$

التمارين

التمرين 1 :

ضع العلامة $\sqrt{}$ أماما كل جملة صحيحة و العلامة \times أماما كل جملة خاطئة.

☐ (1) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $f'(x) = g'(x)$ فإن الدالتان f و g متساويتان .

☐ (2) توجد دالة مستمرة على مجال I ولا تقبل أية دالة أصلية على I .

☐ (3) كل دالة كثيرة حدود تقبل مالا نهاية من الدوال الأصلية.

☐ (4) إذا كانت F و H دالتان أصليتان لكل من الدالتين f و h فإن $F + H$ دالة أصلية للدالة $f + h$.

☐ (5) إذا كانت F دالة أصلية لدالة f فإن الدالة λF دالة أصلية للدالة λf .

☐ (6) إذا كانت F و H دالتان أصليتان لكل من الدالتين f و h فإن $F \times H$ دالة أصلية للدالة $f \times h$.

☐ (7) الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على \mathbb{R}_+^* .

☐ (8) الدالة $x \mapsto \frac{-1}{3x^3}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ على \mathbb{R}_+^* .

☐ (9) الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

☐ (10) الدالة الأصلية التي تستخدم عند 1 للدالة $x \mapsto x^2 - 4x$

هي الدالة : $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{5}{3}$.

التمرين 2 :

بين أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة مما يلي :

$f(x) = -12x + 5$; $F(x) = -4x^2 + 5x$ (1)

$f(x) = 4x^3 - 15x$; $F(x) = x^4 - 5x^3 + 7$ (2)

$f(x) = \frac{8}{(x+4)^2}$; $F(x) = \frac{2x}{x+4}$ (3)

$f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - 2}{2(x+2)\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$; $F(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ (4)

$f(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$; $F(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x^2 + 1}$ (5)

$f(x) = \frac{3x + 1}{2x\sqrt{x}}$; $F(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x}}$ (6)

التمرين 3 :

عين مجموعة الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I .

$I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5x + 2$ (1)

$I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{2}{x^3}$ (2)

$I = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ (3)

$I = \mathbb{R}_-$, $f(x) = \frac{x^5 + 5x^4 - 3x^2}{x^2}$ (4)

$I = \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 5)^2$ (5)

$I = \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 5)^3$ (6)

$I = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 3 \sin x$ (7)

$I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4 \cos x$ (8)

التمرين 4 :

عين مجموعة الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I .

$I = \mathbb{R}$; $f(x) = (x + 1)^{10}$ (1)

$I = \mathbb{R}$; $f(x) = x(x^2 - 5)^6$ (2)

$I =]-\infty ; 1[$; $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^4}$ (3)

$I = \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^4}$ (4)

$I = \mathbb{R}$; $f(x) = (4x + 5)^4$ (5)

$$.I = \left] \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[, y_0 = 1 , x_0 = 0 , f(x) = \frac{-\sin x}{\cos^3 x} \quad (7)$$

$$.I = \mathbb{R} , y_0 = \frac{1}{2} , x_0 = \frac{\pi}{2} , f(x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \quad (8)$$

التمرين 7 :

F و f دالتان معرفتان بالعبارتين :

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x^2 + 6x + 18)^2} , F(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 6x + 18}$$

حيث α, β عدنان حقيقيان.

عين α و β حتى تكون F دالة أصلية للدالة f ثم استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f. استنتج الدالة الأصلية للدالة f و التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x = 0$

التمرين 8 :

عين الدوال الأصلية F للدالة f في كل حالة مميلي :

$$f(x) = \cos^2 x \quad (2) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (1)$$

$$f(x) = \sin^3 x \quad (4) \quad f(x) = \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

$$f(x) = \sin 3x \cos 5x \quad (6) \quad f(x) = \sin x \cos^2 x \quad (5)$$

التمرين 9 :

$$f(x) = \frac{-2x + 1}{(x + 2)^3} : \text{ دالة معرفة بالعبرة :}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$f(x) = \frac{\alpha}{(x + 2)^2} + \frac{\beta}{(x + 2)^3} : \text{ فإن :}$$

حيث α و β عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

(2) استنتج الدوال الأصلية h للدالة f على المجال $]-2 ; +\infty[$.

(3) استنتج الدالة الأصلية g للدالة f و التي تنعدم عند $x = 1$.

التمرين 10 :

إنك التمثيل البياني (Δ) لدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$:

$$.I =]2 ; +\infty[; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} \quad (6)$$

$$.I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} \quad (7)$$

$$.I = \mathbb{R} ; f(x) = \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \quad (8)$$

$$.I = \mathbb{R} ; f(x) = \sin (-x + \pi) \quad (9)$$

$$.I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{2} \sin \left(\pi x + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \right) \quad (10)$$

التمرين 5 :

عين الدالة الأصلية F للدالة f و التي تنعدم عند 2 مع تعيين المجال الذي تمت فيه الدراسة :

$$f(x) = -4x^4 + 2x^2 \quad (1) \quad f(x) = (-x + 3)^4 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x + 8)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}} \quad (4)$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{8} \quad (5) \quad f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

التمرين 6 :

جد في كل حالة مما يلي ، الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(x_0) = y_0$ على المجال I.

$$.I = \mathbb{R} , y_0 = 2 , x_0 = 1 , f(x) = x^2 - 4 \quad (1)$$

$$.I = \mathbb{R} , y_0 = 1 , x_0 = -1 , f(x) = (x + 3)^2 \quad (2)$$

$$.I =]1 ; +\infty[, y_0 = -2 , x_0 = 2 , f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2} \quad (3)$$

$$.I =]0 ; +\infty[, y_0 = 3 , x_0 = 1 , f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

$$.I = \mathbb{R} , y_0 = 1 , x_0 = 0 , f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (5)$$

$$.I = \mathbb{R} , y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} , x_0 = \frac{\pi}{3} , f(x) = \cos 2x - \frac{1}{2} \sin x \quad (6)$$

(2) $F(x) = x^4 - 5x^3 + 7$ لدينا : $I = \mathbb{R}$ و $F'(x) = 4x^3 - 15x^2$ ومنه : $F'(x) = f(x)$ وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

$$(3) \quad D_F = \mathbb{R} - \{-4\}, \quad F(x) = \frac{2x}{x+4}$$

ومنه : $I =]-\infty; -4[$ أو $I =]-4; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{8}{(x+4)^2} \quad \text{وعليه :} \quad F'(x) = \frac{2(x+4) - 1(2x)}{(x+4)^2}$$

إذن : $F'(x) = f(x)$ ومنه F دالة أصلية للدالة f على المجال I .

$$(4) \quad F(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} \quad D_F = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ و } x+2 > 0\}$$

ومنه : $D_F = [0; +\infty[$ و $I =]0; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \sqrt{x+2} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \times (x - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2})^2}$$

$$F'(x) = \frac{(\sqrt{x+2})^2 \cdot (2\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x} (x - \sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}}$$

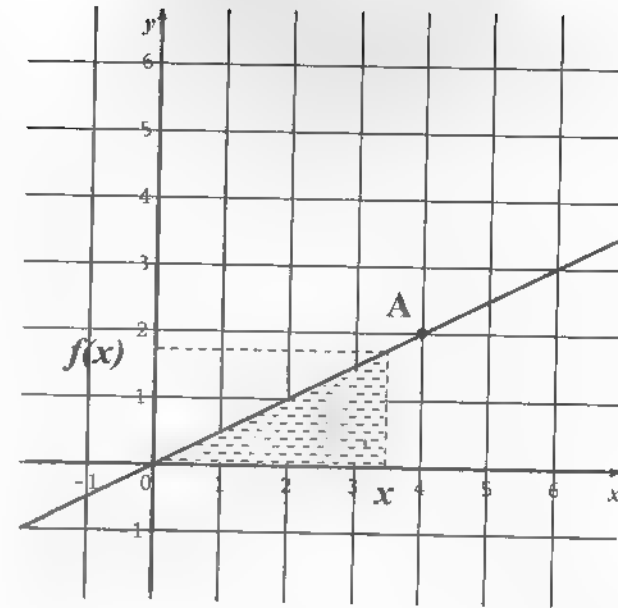
$$F'(x) = \frac{(x+2)(2\sqrt{x} - 1) - x\sqrt{x} + x}{2(x+2)\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$$

$$F'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - x + 4\sqrt{x} - 2 - x\sqrt{x} + x}{2(x+2)\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$$

$$F'(x) = \frac{x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} - 2}{2(x+2)\sqrt{x}\sqrt{x+2}}$$

ومنه :

وبالتالي : $F'(x) = f(x)$ ومنه F دالة أصلية للدالة f على I .



لتكن $A(x)$ مساحة المثلث الملون.

(1) اكتب $f(x)$ بدلالة x .

(2) احسب $A(x)$.

(3) احسب $A'(x)$. ماذا تستنتج ؟

الحلول

التمرين 1 :

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> (1) | <input type="checkbox"/> (2) | <input type="checkbox"/> (3) | <input type="checkbox"/> (4) |
| <input type="checkbox"/> (5) | <input type="checkbox"/> (6) | <input type="checkbox"/> (7) | <input type="checkbox"/> (8) |
| <input type="checkbox"/> (9) | <input type="checkbox"/> (10) | | |

التمرين 2 :

- (1) $F(x) = -4x^3 + 5x$ لدينا : $I = \mathbb{R}$ و $F'(x) = -12x + 5$ ومنه $F'(x) = f(x)$ وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} : \text{ومنه } f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$. F(x) = \frac{-1}{x} - 2\sqrt{x} : \text{وبالتالي}$$

$$f(x) = \frac{x^5}{x^2} - \frac{5x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} : \text{ومنه } f(x) = \frac{x^5 + 5x^4 - 3x^2}{x^2} \quad (4)$$

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3 : \text{وبالتالي}$$

$$. F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 - 3x + k : \text{وعليه}$$

$$. f(x) = x^6 + 10x^3 + 25 : \text{وعليه } f(x) = (x^3 + 5)^2 \quad (5)$$

$$. F(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{5x^4}{2} + 25x + k : \text{وبالتالي}$$

$$. f(x) = (x^2 - 5)^3 \quad (6)$$

$$\text{ومنه } f(x) = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 \times 5 + 3(x^2)(5)^2 - (5)^3$$

$$\text{إذن : } f(x) = x^6 - 15x^4 + 75x^2 - 125$$

$$. F(x) = \frac{x^7}{7} - 3x^5 + 25x^3 - 125x + k : \text{وبالتالي}$$

$$. F(x) = \sin x + 3\cos x + k : \text{وبالتالي } f(x) = \cos x - 3\sin x \quad (7)$$

$$. F(x) = \frac{x^3}{3} + 4\sin x + k : \text{وبالتالي } f(x) = x^2 + 4\cos x \quad (8)$$

التمرين 4 :

$$. f(x) = 1 \times (x+1)^{10} : \text{وعليه } f(x) = (x+1)^{10} \quad (1)$$

$$. f(x) = h'(x) \times [h(x)]^{10} : \text{ومنه } f(x) \text{ من الشكل}$$

$$. h(x) = x+1 \text{ حيث } F(x) = \frac{[h(x)]^{11}}{11} : \text{وعليه}$$

$$. F(x) = \frac{1}{11}(x+1)^{11} + k : \text{وبالتالي } k \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$. D_F = \mathbb{R} , F(x) = \frac{-x^2 + 3x}{x^2 + 1} \quad (5)$$

ومنه : $I = \mathbb{R}$ ولدينا :

$$F'(x) = \frac{(-2x+3)(x^2+1) - 2x(-x^2+3x)}{(x^2+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3x^2 + 3 + 2x^3 - 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2} : \text{وعليه}$$

وبالتالي : $F'(x) = f(x)$ ومنه F دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

$$F(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

$$. D_F = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

$$. I =]0 ; +\infty[: \text{وبالتالي } D_F = \mathbb{R}_+^* : \text{ومنه}$$

$$F'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3x-1)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$F'(x) = \frac{6x - 3x + 1}{2\sqrt{x}x}$$

$$. F'(x) = \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}} : \text{ومنه } F \text{ دالة أصلية للدالة } f \text{ على } I$$

التمرين 3 :

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 2x + k , f(x) = x^3 - 5x + 2 \quad (1)$$

حيث : k ثابت حقيقي

$$F(x) = \frac{-1}{x^2} + k : \text{ومنه } f(x) = \frac{2}{x^3} \quad (2)$$

وعليه : $F(x) = \frac{1}{20} (4x + 5)^5 + k$: ثابت حقيقي .

$$f(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \quad (6)$$

وعليه : $f(x)$ من الشكل : $f(x) = 2 \times \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ حيث : $h(x) = x - 2$

وبالتالي : $F(x) = 2\sqrt{h(x)} + k$

إن : $F(x) = 2\sqrt{x-2} + k$: ثابت حقيقي .

$$f(x) = 2 \times \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} \quad (7)$$

وهي من الشكل : $f(x) = 2 \times \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$ حيث : $h(x) = x^2 + 2x + 5$

وبالتالي : $F(x) = 2\sqrt{h(x)} + k$ إن : $F(x) = 2\sqrt{x^2+2x+5} + k$

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \quad (8)$$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{2} \times \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + k$

$$f(x) = \sin(-x + \pi) \quad (9)$$

ومنه : $F(x) = \cos(-x + \pi) + k$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (10)$$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-1}{\pi}\right) \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + k$

$$F(x) = \frac{-1}{2\pi} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + k$$

..... : 5

..... : 5
مجال الدراسة : $f(x) = -4x^4 + 2x^2 + 1$ لأن الدالة مستمرة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \cdot (x^2 - 5)^6 \quad \text{ومنه} \quad f(x) = x(x^2 - 5)^6 \quad (2)$$

وبالتالي f من الشكل : $f(x) = \frac{1}{2} h'(x) \times [h(x)]^6$

حيث : $h(x) = x^2 - 5$: إن : $F(x) = \frac{1}{2} \frac{[h(x)]^7}{7} + k$

إن : $F(x) = \frac{1}{14} (x^2 - 5)^7 + k$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^4} \quad \text{وعليه} \quad f(x) \text{ من الشكل} : \frac{h'(x)}{[h(x)]^4} \quad \text{حيث} \quad (3)$$

$$F(x) = \frac{-1}{3[h(x)]^3} + k \quad \text{ومنه} \quad h(x) = x - 1$$

وبالتالي : $F(x) = \frac{-1}{3(x-1)^3} + k$: ثابت حقيقي .

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^3} \quad \text{ومنه} \quad f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3} \quad (4)$$

وعليه $f(x)$ من الشكل : $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{h'(x)}{[h(x)]^3}$ حيث : $h(x) = x^2 + 1$

وبالتالي : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2(x^2+1)^2} + k$

وبالتالي : $F(x) = \frac{-1}{4(x^2+1)^2} + k$: ثابت حقيقي .

$$f(x) = \frac{1}{4} \times 4 \cdot (4x - 5)^4 \quad \text{ومنه} \quad f(x) = (4x - 5)^4 \quad (5)$$

إن $f(x)$ من الشكل : $f(x) = \frac{1}{4} \times h'(x) \cdot [h(x)]^4$ حيث :

$$h(x) = 4x - 5$$

وبالتالي : $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{[h(x)]^5}{5} + k$

$$F(x) = \frac{-4}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + k \quad \text{وعليه تقبل دوال أصلية F معرفة كما يلي :}$$

$$\text{لكن : } F(2) = 0 \quad \text{ومنه : } \frac{-4}{5}(2)^5 + \frac{2}{3}(2)^3 + k = 0$$

$$\text{وعليه : } \frac{-128}{5} + \frac{16}{3} + k = 0$$

$$\text{إذن : } \frac{-304}{15} + k = 0 \quad \text{ومنه : } k = \frac{304}{15}$$

$$\text{وعليه : } F(x) = \frac{-4}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{304}{15}$$

$$f(x) = (-1)(-1)(-x+3)^4 \quad \text{وعليه : } f(x) = (-x+3)^4 \quad (2)$$

$$\text{وبالتالي : } F(x) = (-1) \cdot \frac{(-x+3)^5}{5} + k$$

$$\text{إذن : } F(x) = \frac{-1}{5}(-x+3)^5 + k$$

$$\text{ولدينا : } F(2) = 0 \quad \text{ومنه : } \frac{-1}{5}(-2+3)^5 + k = 0$$

$$\text{إذن : } k = \frac{1}{5} \quad \text{وعليه : } F(x) = \frac{-1}{5}(-x+3)^5 + \frac{1}{5}$$

$$D_f = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+8)^2} \quad (3)$$

$$\text{وبالتالي : } F(x) = \frac{-1}{x^2+3x+8} + k$$

$$\text{لكن : } F(2) = 0 \quad \text{ومنه : } \frac{-1}{2^2+3(2)+8} + k = 0$$

$$\text{وعليه : } k = \frac{1}{18} \quad \text{ومنه : } F(x) = \frac{-1}{x^2+3x+8} + \frac{1}{18}$$

$$I =]1; +\infty[\quad \text{ومنه : } D_f =]1; +\infty[, f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad (4)$$

$$\text{وبالتالي : } F(x) = \sqrt{x-1} + k$$

$$\text{لكن : } F(2) = 0 \quad \text{ومنه : } \sqrt{2-1} + k = 0$$

$$\text{وعليه : } k = -1 \quad \text{إذن : } F(x) = \sqrt{x-1} - 1$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{ومنه : } D_f = \mathbb{R} , f(x) = \sin \frac{\pi x}{8} \quad (5)$$

$$\text{وبالتالي : } F(x) = \frac{-1}{\pi} \cos \frac{\pi x}{8} + k$$

$$\text{ومنه : } F(x) = \frac{-8}{\pi} \cos \frac{\pi x}{8} + k \quad \text{لكن : } F(2) = 0$$

$$\text{ومنه : } \frac{-8}{\pi} \cos \frac{\pi}{4} + k = 0 \quad \text{أي أن : } \frac{-8}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} + k = 0$$

$$\text{وعليه : } \frac{-4\sqrt{2}}{\pi} + k = 0 \quad \text{وبالتالي : } k = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\text{إذن : } F(x) = \frac{-8}{\pi} \cos \frac{\pi x}{8} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

$$D_f = \mathbb{R}_+^* ; f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

$$\text{ومنه : } I =]0; +\infty[\quad \text{ولدينا : } f(x) = 2x - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{إذن : } F(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + k$$

$$\text{لكن : } F(2) = 0 \quad \text{وعليه : } (2)^2 - 2\sqrt{2} + k = 0$$

$$\text{وعليه : } k = 2\sqrt{2} - 4 \quad \text{إذن : } F(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{2} - 4$$

التمرين 6 :

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ومنه : } F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + k \quad (1)$$

$$\text{لكن : } F(1) = 2 \quad \text{ومنه : } \frac{1}{3} - 4 + k = 2$$

$$\text{أي : } k = \frac{17}{3} \quad \text{ومنه : } F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + \frac{17}{3}$$

$$f(x) = 1 \cdot (x+3)^2 \quad \text{ومنه : } f(x) = (x+3)^2 \quad (2)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad \text{أي : } k = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad \text{ومنه :}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2\cos^2 x} + k \quad \text{ومنه : } f(x) = \frac{-\sin x}{\cos^3 x} \quad (7)$$

$$F(0) = 1 \quad \text{لكن : } \frac{-1}{2} + k = 0 \quad \text{ومنه : } k = \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \quad \text{وعليه :}$$

$$f(x) = \frac{2\sin x \cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \quad \text{ومنه : } f(x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \quad (8)$$

$$h(x) = 1 + \sin^2 x \quad \text{وعليه } f(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} \quad \text{من الشكل : حيث :}$$

$$F(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} + k \quad \text{أي : } F(x) = \sqrt{h(x)} + k \quad \text{وعليه :}$$

$$\sqrt{1+1} + k = \frac{1}{2} \quad \text{وعليه : } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{لكن :}$$

$$F(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \quad \text{إذن : } k = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \quad \text{ومنه :}$$

التمرين 7 :

F دالة أصلية للدالة f أي : $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \frac{\alpha(x^2 + 6x + 18) - (\alpha x + \beta)(2x + 6)}{(x^2 + 6x + 18)^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{-\alpha x^2 - 2\beta x + 18\alpha - 6\beta}{(x^2 + 6x + 18)^2}$$

$$\begin{cases} -\alpha = 1 \\ -2\beta = 6 \\ 18\alpha - 6\beta = 0 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة مع } f(x) \text{ نجد :}$$

$$\alpha = -1 \quad \text{و} \quad \beta = -3$$

ومنه مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي :

$$F(x) = \frac{(x+3)^3}{3} + k \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\frac{(-1+3)^3}{3} + k = 1 \quad \text{ومنه : } F(-1) = 1$$

$$F(x) = \frac{(x+3)^3}{3} - \frac{5}{3} \quad \text{وبالتالي : } k = -\frac{5}{3} \quad \text{وعليه :}$$

$$F(x) = \frac{-1}{x-1} + k \quad \text{ومنه : } f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \quad (3)$$

$$F(2) = -2 \quad \text{لكن : } -1 + k = -2 \quad \text{وعليه : } k = -1 \quad \text{إذن :}$$

$$F(x) = \frac{-1}{x-1} + k \quad \text{وعليه :}$$

$$F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + k \quad \text{ومنه : } f(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

$$F(1) = 3 \quad \text{لكن : } 1 + 1 + k = 3 \quad \text{وعليه : } k = 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$$

$$f(x) = 2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{ومنه : } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (5)$$

$$F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + k \quad \text{وبالتالي : } F(0) = 1 \quad \text{لكن :}$$

$$2 + k = 0 \quad \text{ومنه : } k = -2$$

$$F(x) = 2\sqrt{x^2+1} - 2 \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = \cos 2x - \frac{1}{2} \sin x \quad (6)$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{لكن : } F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos x + k \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} + k = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + k = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{وعليه :}$$

$$H(x) = \frac{-x - 3}{x^2 + 6x + 18} + k \quad ; \text{ حيث } k \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$\text{من أجل } H(0) = 2 \text{ نجد : } k = \frac{-1}{6} \text{ ومنه الدالة الأصلية للدالة } f \text{ التي تأخذ}$$

$$\text{القيمة 2 من أجل } x = 0 \text{ معرفة بـ : } H(x) = \frac{-x - 3}{x^2 + 6x + 18} + \frac{1}{6}$$

التمرين 8 :

$$(1) \quad f(x) = \sin^2 x$$

$$\text{لدينا : } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{ومنه : } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{وبالتالي : } F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + k$$

$$\text{ومنه : } F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + k \quad ; k \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$(2) \quad f(x) = \cos^2 x$$

$$\text{لدينا : } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{وعليه : } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{إذن : } F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) + k$$

$$\text{وعليه : } F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + k \quad ; k \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$(3) \quad f(x) = \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{لدينا : } \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1 + \cos \left[2 \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{2}$$

$$\text{ومنه : } \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x + \pi)$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4x)$$

$$\text{وعليه : } F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sin(4x) + k$$

$$\text{إذن : } F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin(4x) + k \quad ; k \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$(4) \quad f(x) = \sin^3 x$$

$$\text{لدينا : } \sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x$$

$$= \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)$$

$$= \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{إذن : } f(x) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{وبالتالي : } F(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad ; k \text{ ثابت .}$$

$$(5) \quad f(x) = \sin x \cos^2 x$$

$$\text{إذن : } F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad ; k \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$(6) \quad f(x) = \sin 3x \cos 5x$$

$$\text{لدينا : } \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\text{ومنه : } \sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2} [\sin(3x + 5x) + \sin(3x - 5x)]$$

$$= \frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{2} \sin(-2x)$$

$$\text{ومنه : } f(x) = \frac{1}{2} \sin 8x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

ومنه : $g(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2(x+2)^2} - \frac{7}{18}$

التمرين 10 :

(1) كتابة $f(x)$ بدلالة x :

لدينا : (Δ) مستقيم يشمل المبدأ O و النقطة $A(4; 2)$ ومنه لدينا :

$y = ax$: (Δ) وبما ان : $A \in (\Delta)$ فإن : $2 = a \times 4$

وعليه : $a = \frac{2}{4}$ أي : $a = \frac{1}{2}$ وبالتالي : $y = \frac{1}{2}x$

ومنه : $f(x) = \frac{1}{2}x$

(2) حساب $A(x)$:

مساحة المثلث : $A(x) = \frac{x \times f(x)}{2}$

ومنه : $A(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{2}x}{2}$ وعليه : $A(x) = \frac{1}{4}x^2$

(3) حساب $A'(x)$:

لدينا : $A'(x) = \frac{1}{2}x$

الاستنتاج : $A'(x) = f(x)$

ومنه مساحة الحيز من المستوي هي عبارة دالة أصلية للدالة f .

وعليه : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{8} \cos 8x - \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \cos 2x + k$

ومنه : $F(x) = \frac{-1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + k$

التمرين 9 :

(1) تعيين α, β :

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\}$

لدينا : $f(x) = \frac{\alpha}{(x+2)^2} + \frac{\beta}{(x+2)^3}$

ومنه : $f(x) = \frac{\alpha(x+2) + \beta}{(x+2)^3}$

إن : $f(x) = \frac{\alpha x + 2\alpha + \beta}{(x+2)^3}$

ومنه : $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 5 \end{cases}$ وبالتالي :

ومنه : $f(x) = \frac{-2}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^3}$

(2) استنتاج الدوال الأصلية :

لدينا : $f(x) = -2 \times \frac{1}{(x+2)^2} + 5 \times \frac{1}{(x+2)^3}$

وعليه : $h(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2(x+2)^2} + k$

(3) استنتاج g :

لدينا : $h(1) = 0$ ومنه : $\frac{2}{3} - \frac{5}{18} + k = 0$ ومنه : $k = \frac{-7}{18}$

5 - الدالة الأسية ذات الأساس e

تعريف :

ليكن a عدد حقيقي

نسمي حالا على المجال I للمعادلة التفاضلية : $y' = ay$ كل دالة f تقبل الاشتقاق على I و

تحقق على I : $f' = af$.

مبرهنة 1 :

توجد دالة f تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} وهي حل للمعادلة التفاضلية : $y' = y$ وتحقق

$f(0) = 1$. تسمى هذه الدالة الدالة الأسية ونرمز لها بالرمز : $x \mapsto \exp(x)$

مبرهنة 2 :

الدالة الأسية موجبة تماما على \mathbb{R}

مبرهنة 3 :

a عدد حقيقي معطى . حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R}

بالعبارة : $f(x) = k \cdot \exp(ax)$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

2- الرمز e^x :

مبرهنة 4 :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

مبرهنة 5 :

العدد الحقيقي $\exp(1)$ يرمز له بالرمز e حيث : $e = 2,72$.

من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $\exp(x) = e^x$.

خواص :

$$\bullet e^0 = 1 ; e^1 = e ; e^{-1} = \frac{1}{e} ; e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

نتائج :

من أجل كل عددين حقيقيين a و b

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad (1) \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad (2)$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (3) \quad e^{rx} = (e^x)^r , r \in \mathbb{Q} \quad (4)$$

3- دراسة الدالة : $x \mapsto e^x$

نتائج : من تعريف الدالة $x \mapsto e^x$ لدينا :

$$\bullet x \mapsto e^x \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{R} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

خاصية 6 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (1)$$

نتائج :

• من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x > 0$

• من أجل كل عددين x و y لدينا : $e^x = e^y$ تكافئ $x = y$

$e^x > e^y$ تكافئ $x > y$

خاصية 7 :

إذا كانت g دالة تقبل الاشتقاق على مجال I فإن الدالة $e^{g(x)}$ تقبل الاشتقاق على

I حيث : $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$

مثال :

عين الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = e^{x^2 - 4x}$

الحل :

$$f'(x) = (2x - 4) e^{x^2 - 4x}$$

خاصية 8 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (1)$$

4- المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$:

خاصية 9 :

a و b عددين حقيقيين ، $a \neq 0$ حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تعطى بالعبارة :

$$y = ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{حيث } k \text{ ثابت غير معدوم .}$$

مثال :

$$y = ke^{2x} + \frac{3}{2} \quad \text{حلول المعادلة } y' = 2y - 3 \text{ تعطى بالعبارة :}$$

حيث k ثابت حقيقي غير معدوم .

التمارين

التمرين 1 :
ضع العلامة $\sqrt{}$ أمام كل جملة صحيحة و العلامة \times أمام كل جملة خاطئة .

- (1) يوجد عدد x من \mathbb{R} بحيث $e^{-x} < 0$ ☐
(2) حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال f المعرفة بالعبارة : ☐

$$f(x) = k \cdot e^{-2x}$$

$$e^{-x} = -e^x \quad (3) \quad \text{☐$$

$$e^{2x} = -e^{x^2} \quad (4) \quad \text{☐$$

$$e^{2x} = (e^x)^2 \quad (5) \quad \text{☐$$

$$\text{الدالة } e^{-2x} \mapsto x \text{ معرفة على } \mathbb{R} \quad (6) \quad \text{☐$$

$$e^{\frac{1}{3}x} = \sqrt[3]{e^x} \quad (7) \quad \text{☐$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} = 0 \quad (8) \quad \text{☐$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad (9) \quad \text{☐$$

$$(10) \text{ إذا كان : } e^{-x} < e^{-y} \text{ فإن : } x < y \quad \text{☐$$

$$e^x \times e^{-x} = 1 \quad (11) \quad \text{☐$$

$$e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} \quad (12) \quad \text{☐$$

التمرين 2 :
حل في \mathbb{R} كل من المعادلات و المتراجحات التالية :

$$e^{|x-2|} < e^2 \quad (2) \quad e^{x^2-4x} > 1 \quad (1)$$

$$e^{x^2-2} = e^{-6} \quad (4) \quad e^{3x-5} - e^{-x^2-2} = 0 \quad (3)$$

$$e^{1-3x} \leq e^{5x-4} \quad (6) \quad 2x e^x - 3 e^x \leq 0 \quad (5)$$

$$(x^2 - 5x) e^x - (2x - 12) e^x = 0 \quad (7)$$

التمرين 3 :
حل في \mathbb{R} الجمل الآتية :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x} \cdot \frac{1}{e} = e^{-y} \end{cases} , \begin{cases} xy = -2 \\ e^{5x} \cdot e^{6y} = \frac{1}{e^7} \end{cases} , \begin{cases} xy = 12 \\ e^x \cdot e^y = e^{-7} \end{cases}$$

التمرين 4 :
عين مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تقبل فيها الاشتقاق ثم عين دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = e^{x^2-4x} - 5x \quad (2) \quad f(x) = e^{-2x+5} \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \quad (4) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \quad (3)$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x}-1} \quad (6) \quad f(x) = e^{|x|} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad (8) \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 - 4} \quad (10) \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \quad (12) \quad f(x) = e^{2x} - 4e^x + 5 \quad (11)$$

التمرين 5 :
عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = x e^{x^2} \quad (2) \quad f(x) = e^{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad (4) \quad f(x) = (3x^2 - x) e^{2x^3 - x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \quad (6) \quad f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad (5)$$

التمرين 6 :
احسب نهايات الدالة f من أجل : $x \rightarrow +\infty$ في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = e^{-x+1} \quad (2) \quad f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = e^{2x} - 4x \quad (4) \quad f(x) = \frac{e^{x^3}}{x^3} \quad (3)$$

التمرين 11 :

ادرس تغيرات الدالة f في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad (1)$$

$$f(x) = e^{|x|} \quad (4) \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$f(x) = e^{(x-2)(x+2)} \quad (6) \quad f(x) = \frac{e^x + 2}{1 - e^x} \quad (5)$$

التمرين 12 :

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = x + \frac{e^x}{e^x + 1}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 4 cm).

(1) احسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(2) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم استنتج وجود مستقيم مقارب (D).

(3) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(4) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ للمنحنى (C).

(5) عين النقطة ω نقطة تقاطع (C) مع محور الترتيب ثم بين أن ω مركز تناظر

للمنحنى (C).

(6) انشئ المنحنى (C).

التمرين 13 :

الدالة f معرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = x + 1 - e^{-x}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) ادرس الفروع اللاهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (C). (3) انشئ (C).

(4) عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f ثم استنتج الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة 4 عند

$x = 0$.

التمرين 14 :

1- لنكن g دالة معرفة بالعلاقة : $g(x) = e^x + x + 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

11- لنكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$

$$f(x) = \frac{e^{x-2}}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = xe^{-5x} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{e^{3x} - 5x^3 + 2}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \quad (7)$$

التمرين 7 :

احسب نهايات الدالة f من أجل $x \rightarrow 0$ في كل حالة مما يلي :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2} \quad (2) \quad f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1} \quad (4) \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{-e^{-x} + 1}{x^2 - x} \quad (6) \quad f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{4x^2 + 6x} \quad (5)$$

التمرين 8 :

x عدد طبيعي.

(1) احسب المجموع : $S_1(x) = 1 + e + e^2 + \dots + e^x$

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_1(x)$

(3) احسب المجموع : $S_2(x) = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-x}$

(4) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_2(x)$

التمرين 9 :

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

(2) عين الدالة المشتقة للدالة f من أجل $x \neq 0$.

التمرين 10 :

لنكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$

(1) عين كل من المشتقات المتتالية f' ; f'' ; $f^{(3)}$ للدالة f .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معطوم n يكون :

$$f^{(n)}(x) = e^x [x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1]$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن : $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

(2) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

(3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(4) ادرس الوضعية النسبية لكل من (C) و (Δ) .

(5) بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C).

(6) أنشئ (C).

التمرين 15 :

(1) لتكن f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = 80 + ae^{bx}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

عين a و b حتى يشمل (C) النقطتين $A(0 ; 53)$ ، $B(3 ; 60)$

(تعطي القيم الحقيقية ثم القيم المدورة إلى 10^{-1})

(2) يعطي إنتاج شركة في السنة n بالعلاقة $U_n = 80 - 27e^{-0,1n}$

- بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما

- بعد كم سنة يزيد إنتاج الشركة عن 72

(3) نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $V_n = e^{-0,1n}$

- بين أن (V_n) متتالية هندسية.

- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

- احسب $S = V_1 + V_2 + \dots + V_{12}$

التمرين 16 :

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

(Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ، الوحدة 2cm.

I-1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(-x) + f(x) = 2$

ثم استنتج وجود مركز تناظر (Ω) للمنحنى (Γ)

(2) احسب نهايات الدالة f ثم استنتج معادلات المستقيمات المقاربة.

(3) احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

(4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Γ) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بالعلاقة : $g(x) = f(x) - (x + 1)$

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم إشارة $g(x)$ بعد تعيين $g(0)$.

- استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (Γ) و المماس (Δ) .

(6) أنشئ (Δ) ثم (Γ).

II-1) بين أنه إذا كان $f(x) = x$ فهذا يكفي أن $g(x) = -1$.

(2) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع (Γ) في نقطة فاصلتها

α حيث $2 < \alpha < 3$.

III- ليكن المجال : $I = [2 ; 3]$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

الحلول

التمرين 1 :

<input type="checkbox"/> × (3)	<input type="checkbox"/> √ (2)	<input type="checkbox"/> × (1)
<input type="checkbox"/> √ (6)	<input type="checkbox"/> √ (5)	<input type="checkbox"/> × (4)
<input type="checkbox"/> √ (9)	<input type="checkbox"/> √ (8)	<input type="checkbox"/> √ (7)
<input type="checkbox"/> √ (12)	<input type="checkbox"/> √ (11)	<input type="checkbox"/> × (10)

التمرين 2 :

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

(1) لدينا : $e^{x^2-4x} > 1$ وهذه تكافئ : $e^{x^2-4x} > e^0$

وعليه : $x^2 - 4x > 0$ أي $x(x - 4) > 0$

ومنه : $x \in]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$

مجموعة الحلول : $S =]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$

(2) لدينا : $e^{|x-2|} > e^2$ وهذه تكافئ : $|x-2| < 2$
وعليه : $-2 < x-2 < 2$ وبالتالي : $0 < x < 4$

مجموعة الحلول : $S =]0 ; 4[$

(3) لدينا : $e^{3x-5} - e^{-x^2-2} = 0$ وهذه تكافئ : $e^{3x-5} = e^{-x^2-2}$
وعليه : $3x-5 = -x^2-2$ ومنه : $x^2 + 3x - 3 = 0$
لدينا : $\Delta = 21$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين
 $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ ، $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$

(4) لدينا : $e^{x^2-5x} = e^{-6}$ وهذه تكافئ : $x^2 - 5x = -6$

إن : $x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1$ وعليه للمعادلة حلين متمايزين $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$

(5) لدينا : $2x e^x - 3e^x \leq 0$ وهذه تكافئ : $e^x (2x - 3) \leq 0$

وهي تكافئ : $2x - 3 \leq 0$ ومنه : $x \leq \frac{3}{2}$

مجموعة الحلول : $S =]-\infty ; \frac{3}{2}]$

(6) لدينا : $e^{1-3x} \leq e^{5x-4}$ وهذه تكافئ : $1 - 3x \leq 5x - 4$

ومنه : $-8x \leq -5$ وبالتالي : $x \geq \frac{5}{8}$

مجموعة الحلول : $S = [\frac{5}{8} ; +\infty[$

(7) $(x^2 - 5x) e^x - (2x - 12) e^x = 0$

وهذه تكافئ : $e^x (x^2 - 5x - 2x + 12) = 0$

وهذه تكافئ : $x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين $x_1 = 3$ ، $x_2 = 4$

التمرين 3 :

(1) لدينا : $\begin{cases} xy = 12 \\ e^x \cdot e^y = e^{-7} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} xy = 12 \\ e^{x+y} = e^{-7} \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = -7 \end{cases}$ ومنه x, y حلين للمعادلة : $x^2 + 7x + 12 = 0$

لدينا : $\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين متمايزين : $x_1 = -3$ و $x_2 = -4$

إن : $(x ; y) = (-3 ; -4)$ أو $(x ; y) = (-4 ; -3)$

مجموعة الحلول : $S = \{(-4 ; -3), (-3 ; -4)\}$

(2) لدينا : $\begin{cases} xy = -2 \\ e^{5x} \cdot e^{6y} = \frac{1}{e^7} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} xy = -2 \\ e^{5x+6y} = e^{-7} \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} 5x \cdot 6y = -60 \\ 5x + 6y = -7 \end{cases}$

إن $5x, 6y$ هما حلين للمعادلة : $x^2 + 7x - 60 = 0$

لدينا : $\Delta = 289 = (17)^2$ ومنه للمعادلة حلين : $x_1 = -12$ و $x_2 = 5$

ومنه : $5x = -12$ و $6y = 5$ وعليه : $x = \frac{-12}{5}$ و $y = \frac{5}{6}$

أو $5x = 5$ و $6y = -12$ وعليه : $x = 1$ و $y = -2$

مجموعة حلول الجملة : $S = \left\{ \left(\frac{-12}{5} ; \frac{5}{6} \right), (1 ; -2) \right\}$

(3) لدينا : $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x} \cdot e^{-1} = e^{-y} \end{cases}$ وهي تكافئ : $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x} \cdot \frac{1}{e} = e^{-y} \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x + y = 5 \\ e^{2x-1} = e^{-y} \end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 1 = -y \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x - 5 = -y \\ 2x - 1 = -y \end{cases}$ إن : $2x - 1 = x - 5$

وعليه : $x = -4$ ومنه : $y = 9$

مجموعة حلول الجملة : $S = \{(-4 ; 9)\}$

الاشتقاق من $x > 0$ أي على \mathbb{R}_+^* حيث : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}-1}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (7) \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ وتقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\text{حيث : } f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}) - 2e^{2x}(e^x - 1)}{(e^{2x})^2}$$

$$\text{ومنه : } f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 2e^x + 2)}{e^{4x}}$$

$$\text{إن : } f'(x) = \frac{-e^x + 2}{e^{2x}}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad (8) \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة من أجل } e^x - 1 \neq 0 \text{ ومنه } e^x \neq 1$$

وعليه : $x \neq 0$ إن : $D_f = \mathbb{R}^*$ و f تقبل الاشتقاق على \mathbb{R}

$$\text{حيث : } f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} \quad \text{وعليه : } f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}} \quad (9) \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ وتقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\text{حيث : } f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot e^{2x} - 2e^{2x}(e^{2x} - 4)}{(e^{2x})^2}$$

$$\text{إن : } f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - e^{2x} + 4)}{(e^{2x})^2} \quad \text{وبالتالي : } f'(x) = \frac{8}{e^{2x}}$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 - 4} \quad (10) \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة من أجل : } x^2 - 4 \neq 0$$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$ وتقبل الاشتقاق على D_f

$$\text{حيث : } f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 4) - 2x(e^x - 1)}{(x^2 - 4)^2} \quad \text{ومنه :}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 e^x - 4e^x + 2x e^x + 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

التمرين 4 :

$$(1) \quad f(x) = e^{-2x+5} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ وتقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\text{حيث : } f'(x) = -2e^{-2x+5}$$

$$(2) \quad f'(x) = e^{x^2-4x} - 5x \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ وتقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\text{حيث : } f'(x) = (2x - 4)e^{x^2-4x} - 5$$

$$(3) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة من أجل } x - 2 \neq 0 \text{ ومنه : } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{وتقبل الاشتقاق على } D_f \text{ حيث : } f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} \times e^{\frac{1}{x-2}}$$

$$(4) \quad f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة من أجل } x \neq 0 \text{ ومنه : } D_f = \mathbb{R}^*$$

$$\text{وتقبل الاشتقاق على } D_f \text{ حيث : } f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{x-1}{x}}$$

$$(5) \quad f(x) = e^{|x|} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة هي } \mathbb{R} \text{ ولدينا : } \begin{cases} f(x) = e^x ; x \geq 0 \\ f(x) = e^{-x} ; x \leq 0 \end{cases}$$

* من أجل $x > 0$: f تقبل الاشتقاق حيث : $f'(x) = e^x$

* من أجل $x < 0$: f تقبل الاشتقاق حيث : $f'(x) = -e^{-x}$

* من أجل $x = 0$: ندرس قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

إن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{e^{-x} - 1}{-x} \right] = -1$$

إن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار

لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

$$(6) \quad f(x) = e^{\sqrt{x}-1} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة من أجل } x \geq 0 \text{ أي على } \mathbb{R}_+ \text{ وتقبل}$$

$g(x) = \frac{1}{2} e^{2x^3 - x^2} + c$ مع c ثابت حقيقي .

$$f(x) = \frac{h'(x)}{[h(x)]^n} \quad (4) \quad f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} وعليه تقبل دوال أصلية g حيث :

$$g(x) = \frac{-1}{e^x - 1} + c \quad \text{إذن} \quad g(x) = \frac{-1}{(2-1)(e^x - 1)^{2-1}}$$

مع c ثابت حقيقي.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} \quad \text{ولدينا} \quad D_f = \mathbb{R}^* , \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2} \quad (5)$$

$$f(x) = k \cdot h'(x) \times [h(x)]^n \quad \text{وهي من الشكل} \quad f(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

الدالة f معرفة ومستمرة على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

ومنه تقبل دوال أصلية معرفة كما يلي : $g(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c$ مع c ثابت حقيقي .

$$D_f = \mathbb{R} , \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} \quad \text{ولدينا} \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$$

وبالتالي بما أن الدالة f مستمرة على \mathbb{R} فإنها تقبل دوال أصلية g حيث :

$$g(x) = \sqrt{e^{2x} + 1} + c \quad \text{مع } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

التمرين 6 :

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^3}}{x^3} = 0$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x - 4)e^x + 2x}{(x^2 - 4)^2} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 5 \quad (11) \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ وتقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x \quad \text{حيث :}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \quad (12) \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة من أجل } e^{2x} - 1 \neq 0 \text{ ومنه : } e^{2x} \neq 1$$

$$\text{أي : } e^{2x} \neq e^0 \quad \text{أي } 2x \neq 0 \quad \text{ومنه : } x \neq 0 \quad \text{إذن : } D_f = \mathbb{R}^* \text{ الدالة } f$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 1) - 2e^{2x} \cdot e^x}{(e^{2x} - 1)^2} \quad \text{حيث : } D_f$$

$$f'(x) = \frac{e^x(-e^{2x} - 1)}{(e^{2x} - 1)^2} \quad \text{وبالتالي :} \quad f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 1 - 2e^{2x})}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

التمرين 5 :

تعيين الدوال الأصلية :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2e^{2x} \quad \text{ولدينا} \quad D_f = \mathbb{R} , \quad f(x) = e^{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = k \cdot h'(x) e^{hx} \quad \text{وهي من الشكل :}$$

الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} وعليه تقبل دوال أصلية g حيث

$$g(x) = \frac{1}{2} \times e^{2x} + c \quad \text{مع } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{x^2} \quad \text{ولدينا} \quad D_f = \mathbb{R} , \quad f(x) = x e^{x^2} \quad (2)$$

الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} وعليه تقبل دوال أصلية g حيث :

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c \quad \text{مع } c \text{ ثابت حقيقي .}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (6x^2 - 2x) e^{2x^3 - x^2} \quad \text{ولدينا} \quad D_f = \mathbb{R} , \quad f(x) = (3x^2 - x) e^{2x^3 - x^2} \quad (3)$$

الدالة f معرفة ومستمرة على \mathbb{R} وعليه تقبل دوال أصلية g حيث :

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{x} \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x(2x + 3)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{1}{2x + 3} = \frac{1}{3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^{-x} - 1)}{-x(-x + 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \times \frac{1}{-x + 1} = -1$$

التمرين 8 :

(1) حساب $S_1(x)$

$$S_1(x) = e^0 + e^1 + e^2 + \dots + e^x$$

وهو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها e و عددها $x+1$ حداً و منه :

$$S_1(x) = 1 \times \frac{1 - e^{x+1}}{1 - e} \quad \text{إذن} \quad S_1(x) = \frac{1 - e^{x+1}}{1 - e}$$

(2) حساب النهاية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e} \times (1 - e^{x+1}) = +\infty$$

(3) حساب المجموع $S_2(x)$

$$S_2(x) = e^{-0} + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-x}$$

وهو مجموع $x+1$ حداً من متتالية هندسية أساسها e^{-1} أي $\frac{1}{e}$ و عليه :

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{e^{2x}}{2x} - 2 \right) = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{5} (-5x) e^{-5x} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-2}}{x-2} \times \frac{x-2}{x} = +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{3}x} \right)^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{x} \right)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{3 \times \frac{1}{3}x} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \times \frac{e^{\frac{1}{3}x}}{\frac{1}{3}x} \right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^3 \times \left(\frac{e^{\frac{1}{3}x}}{\frac{1}{3}x} \right)^3 = +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 5x^3 + 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{3x}}{x^3} - 5 + \frac{2}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right)^3 - 5 + \frac{2}{x} = +\infty$$

التمرين 7 :

حساب النهايات :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \times \frac{e^{4x} - 1}{4x} = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \times \frac{e^{2x} - 1}{(2x)} = +\infty$$

$$f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$$

إذن :

$$f''(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x + 2)e^x$$

ومنه :

$$f''(x) = (x^2 + 5x + 5)e^x$$

إذن :

$$f^{(3)}(x) = (2x + 5)e^x + (x^2 + 5x + 5)e^x$$

ومنه :

$$f^{(3)}(x) = (x^2 + 7x + 10)e^x$$

(2) البرهان أن :

$$f^{(n)}(x) = e^x [x^2 + (2n + 1)x + n^2 + 1]$$

$$f^{(1)}(x) = e^x (x^2 + 3x + 2) : n = 1 \text{ من أجل } \bullet$$

وهي صحيحة مما سبق .

• نفرض صحة $p(n)$ ونبرهن صحة $p(n + 1)$

$$p(n) : f^{(n)}(x) = e^x [x^2 + (2n + 1)x + n^2 + 1]$$

$$p(n + 1) : f^{(n+1)}(x) = e^x [x^2 + (2n + 3)x + (n + 1)^2 + 1]$$

$$\text{لدينا : } f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) \text{ ومنه :}$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x [x^2 + (2n + 1)x + n^2 + 1] + (2x + 2n + 1)e^x$$

$$= e^x [x^2 + (2n + 3)x + n^2 + 2n + 1 + 1]$$

$$= e^x [x^2 + (2n + 3)x + (n + 1)^2 + 1]$$

ومنه : $p(n + 1)$ صحيحة

$$f^{(n)}(x) = e^x [x^2 + (2n + 1)x + n^2 + 1] \text{ إذن :}$$

التمرين 11 :

دراسة تغيرات الدوال :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ لدينا :}$$

$$\bullet D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \neq 0\}$$

$$e^x - 1 = 0 \text{ معناه : } e^x = 1 \text{ ومنه : } e^x = e^0 \text{ أي : } x = 0$$

$$\bullet \text{ وبالتالي : } D_f = \mathbb{R} - \{0\} \text{ أي : }]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$S_2(x) = 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^{x+1}}}{\frac{e-1}{e}} \text{ أي : } S_2(x) = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{x+1}}{1 - \frac{1}{e}}$$

$$\text{إذن : } S_2(x) = \frac{e}{e-1} \times \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}}\right)$$

(4) حساب النهاية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e-1} \times \left(1 - \frac{1}{e^{x+1}}\right) = \frac{e}{e-1}$$

التمرين 9 :

$$D_f = \mathbb{R}$$

(1) دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x} \times \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$$

وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{x} \times \frac{e^x - 1}{x} = -\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

2- تعيين الدالة المشتقة من أجل $x \neq 0$

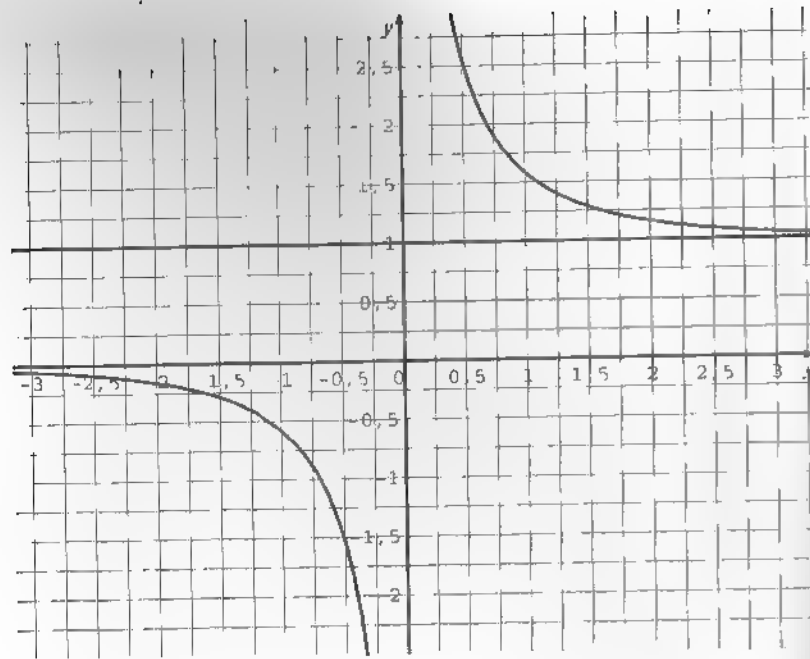
$$f'(x) = \frac{(3e^{3x} - 2e^{2x})x - (e^{3x} - e^{2x})}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}[(3e^x - 2)x - (e^x - 1)]}{x^2}$$

ومنه :

التمرين 10 :

(1) حساب $f^{(3)}$ ، f'' ، f'



$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{لدينا (2)}$$

$$\bullet D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

وله $f'(x) > 0$ على \mathbb{R} ومنه f متزايدة تماماً على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+

$$\begin{cases} e^x \longrightarrow 1 \\ e^x - 1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\begin{cases} e^x \longrightarrow 1 \\ e^x - 1 \longrightarrow 0 \end{cases} \quad \text{لأن:}$$

$$\bullet f'(x) = \frac{e^x (e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x (e^x - 1 - e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} \quad \text{ومنه:}$$

وعليه $f'(x)$ سالبة من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ومنه f متناقصة تماماً

على كل من المجالين: $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$.

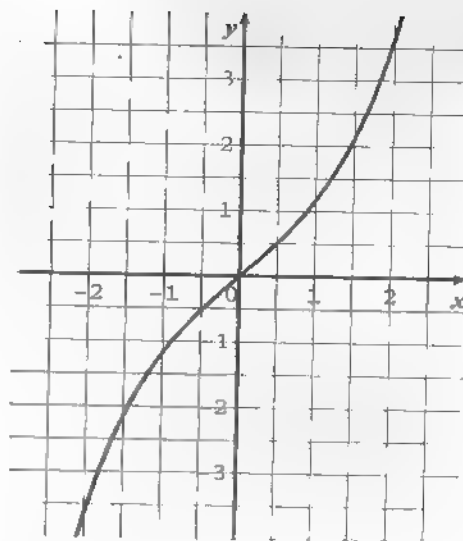
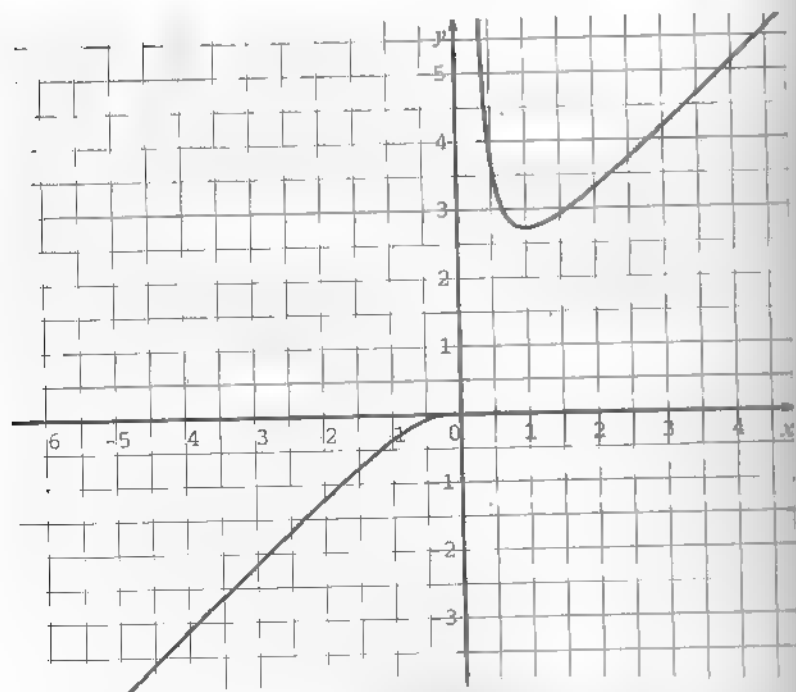
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	0	$+\infty$	1

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	○	+
x	-	○	+	+
$f'(x)$	+	-	○	+

إن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty ; 0[$ و $]1 ; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]0 ; 1]$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty \rightarrow 0$	$+\infty \rightarrow e$	$+\infty$	

$$f(1) = 1 \cdot e^1 = e$$



(3) لدينا : $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

$$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

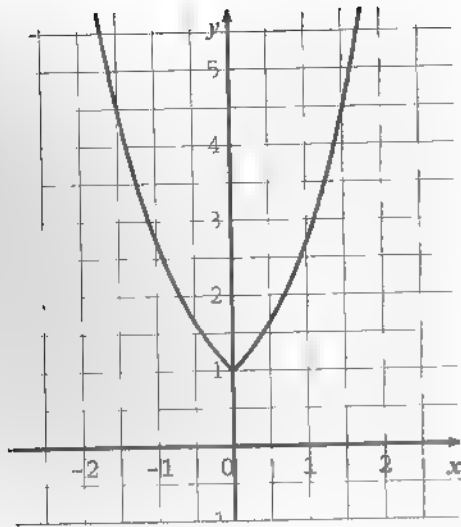
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^z}{z} = +\infty$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) x$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right) \quad \text{أي} \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left[1 - \frac{1}{x} \right] \quad \text{ومنه :}$$

$$\text{لدينا } e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ ومنه } f'(x) \text{ له نفس إشارة } \frac{x-1}{x}$$



(5) لدينا : $f(x) = \frac{e^x + 2}{1 - e^x}$

• $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - e^x \neq 0\}$

$1 - e^x = 0$ معناه : $e^x = 1$ ومنه $x = 0$

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2}{1 - e^x} = 2$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + 2 \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(\frac{1}{e^x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2}{1 - e^x} = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	$+$	0	$-$

$\begin{cases} e^x + 2 \longrightarrow 3 \\ 1 - e^x \longrightarrow 0 \end{cases}$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2}{1 - e^x}$

(4) لدينا : $f(x) = e^{|x|}$

• $D_f =]-\infty ; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{|x|} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{|x|} = +\infty$

لدينا : $\begin{cases} |x| = x, & x \geq 0 \\ |x| = -x, & x \leq 0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} f(x) = e^x, & x \geq 0 \\ f(x) = e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$

• من أجل $x > 0$: $f'(x) = e^x$ وعليه f متزايدة تماماً على $]0 ; +\infty[$

من أجل $x < 0$: $f'(x) = -e^{-x}$ وعليه f متناقصة تماماً على $] -\infty ; 0]$

• قابلية الاشتقاق عند 0 .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين .

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) \times \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -1$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار .

لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-1 \quad 1$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

لأن: $(x-2)(x+2) \longrightarrow +\infty$

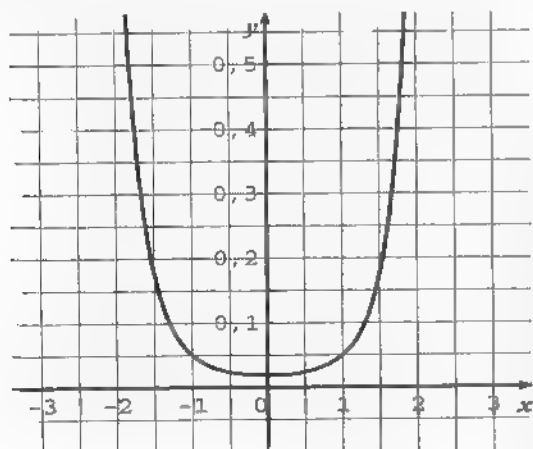
$$\bullet f'(x) = [1 \times (x+2) + 1 \times (x-2)] e^{(x-2)(x+2)}$$

$$f(x) = 2x \cdot e^{(x-2)(x+2)}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
2x	-	○	+
f'(x)	-	○	+

f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	○	+
f(x)	$+\infty$	e^{-4}	$+\infty$



التمرين 12:

(1) حساب $D_f = \mathbb{R}$: $f'(x)$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x (e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

وعليه: $f'(x) > 0$ على \mathbb{R} ومنه الدالة f متزايدة تماماً على \mathbb{R} .

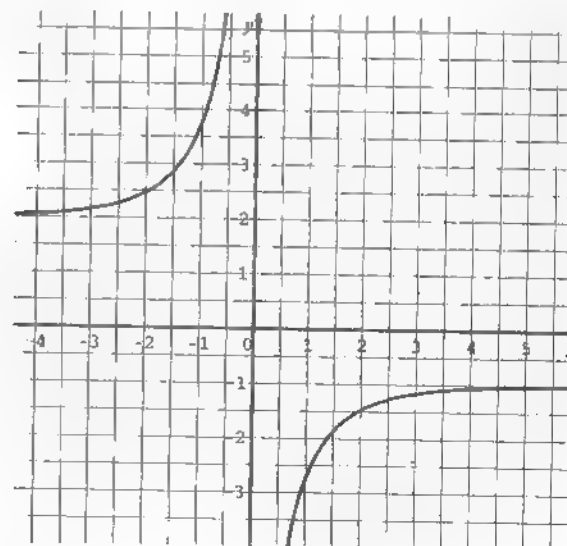
$$f'(x) = \frac{e^x (1 - e^x) - (-e^x) (e^x + 2)}{(1 - e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (1 - e^x + e^x + 2)}{(1 - e^x)^2} = \frac{3e^x}{(1 - e^x)^2}$$

وعليه $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من D_f إذن f متزايدة تماماً على كل من

المجالين $]-\infty; 0]$ و $]0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+	+	+
f(x)	$2 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$+\infty$



(6) لدينا: $f(x) = e^{(x-2)(x+2)}$

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x-2)(x+2)} = +\infty$$

لأن: $(x-2)(x+2) \longrightarrow +\infty$

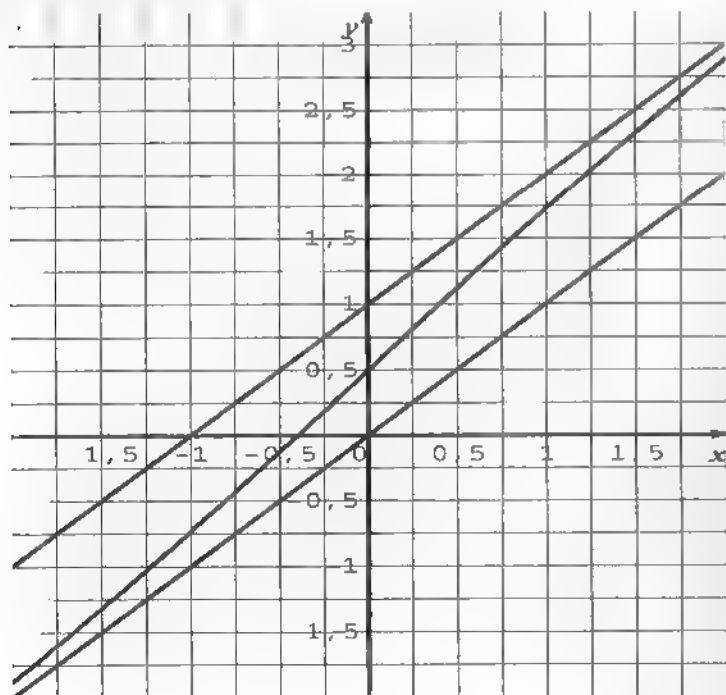
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-2)(x+2)} = +\infty$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^x} + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$$

ومنه $\omega \left(0 ; \frac{1}{2} \right)$ مركز تناظر (C)

(6) انشاء (C) :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty \rightarrow +\infty$	



التمرين 13 :

(1) دراسة تغيرات الدالة f :

- $D_f =]-\infty ; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 - e^{-x}) = -\infty$

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = -\infty$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0$

فإن : $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

(3) لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} \right) = +\infty$$

4 تبين أن $y = x + 1$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^x}{e^x + 1} - x - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{e^x + 1} \right) = 0$$

ومنه : $y = x + 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

(5) تعيين إحداثي ω : $(C) \cap (y' y) = \{M(x ; y) \in (C) : x = 0\}$

ولدينا : $f(0) = \frac{1}{2}$ ومنه : $\omega \left(0 ; \frac{1}{2} \right)$

تبين أن ω مركز تناظر : الدالة معرفة على \mathbb{R} ولذا نبرهن أن :

$$\beta = \frac{1}{2}, \alpha = 0 \text{ حيث } f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

أي نبرهن أن : $f(-x) + f(x) = 1$ لدينا :

$$f(-x) + f(x) = -x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + x + \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

* تعيين g بحيث : $g(0) = 4$

لدينا : $g(0) = 0 + 0 + 1 + c$ وعليه : $1 + c = 4$ أي $c = 3$

إذن : $g(x) = \frac{x^2}{2} + x + e^{-x} + 3$

التمرين 14 :

(1) لدينا : $g(x) = e^x + x + 1$

(1) دراسة تغيرات g :

• $D_g =]-\infty ; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$

• $g'(x) = e^x + 1$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) نبيان أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $-1,28 < \alpha < -1,27$

في المجال $[-1,28 ; -1,27]$ الدالة g مستمرة و متزايدة تماما ولدينا :

$g(-1,28) = e^{-1,28} - 0,28 \simeq -0,002$

$g(-1,27) = e^{-1,27} - 0,27 \simeq 0,011$

وعليه : $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α حيث : $g(\alpha) = 0$

و $\alpha \in]-1,28 ; -1,27[$

1- استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - e^{-x}) = +\infty$

• $f'(x) = 1 + e^{-x}$

ومنه $f'(x) > 0$ على \mathbb{R} ومنه f متزايدة تماما على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة : هناك فرعين لانهايين.

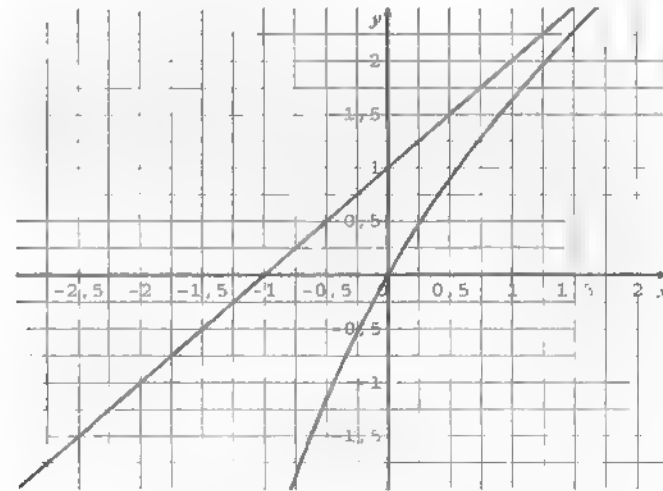
$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = 0$

وعليه (C) يقبل مستقيما مقاربا مانلا معادلته $y = x + 1$ عند $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right) = +\infty$

وعليه (C) يقبل فرع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $-\infty$.

(3) إنشاء (C) :



(4) * تعيين مجموع الدوال الأصلية للدالة f :

$f(x) = x + 1 - e^{-x}$

الدالة f مستمرة على \mathbb{R} وعليه f تقبل دوال أصلية g حيث :

$g(x) = \frac{x^2}{2} + x + e^{-x} + c$ مع c ثابت حقيقي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$0 \rightarrow f(\alpha) \rightarrow +\infty$		

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1}$$

(2) * تبيان أن : $f(\alpha) = \alpha + 1$

لدينا : $g(\alpha) = 0$

أي : $e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$ وعليه : $e^{\alpha} = -\alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-\alpha} \quad \text{ومنه :} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha - 1 + 1}$$

وبالتالي : $f(\alpha) = \alpha + 1$

* استنتاج حصر $f(\alpha)$

لدينا : $-1,28 < \alpha < -0,27$ ومنه : $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$

أذن : $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$

(3) * معادلة المماس (Δ) : $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$$\text{حيث : } f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

ومنه : $y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0$ وعليه معادلة المماس (Δ) هي : $y = \frac{1}{2}x$

* دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

$$f(x) - y = \frac{x e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}x = \frac{2x e^x - x(e^x + 1)}{2(e^x + 1)} = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

لدينا x و $(e^x - 1)$ من نفس الإشارة وعليه :

من أجل $x \neq 0$: (C) فوق (Δ) ومن أجل $x = 0$: (C) يمس (Δ)

(4) تبيان أن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x + 1}$$

لدينا : $g(\alpha) = 0$ وفي المجال $] \alpha ; +\infty [$: $g(x) > 0$

وفي المجال $] -\infty ; \alpha [$: $g(x) < 0$

$$\text{(II) لدينا : } f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}$$

$$(1) \bullet \text{ تبيان أن : } D_f = \mathbb{R} \quad ; \quad f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{لدينا : } f'(x) = \frac{(e^x + x e^x)(e^x + 1) - e^x \cdot x e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x [(1 + x)(e^x + 1) - x e^x]}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x [e^x + 1 + x e^x + x - x e^x]}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x (e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{وبالتالي : } f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

• استنتاج تغيرات الدالة f :

$$\bullet D_f =] -\infty ; +\infty [$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{-x}} \right) = +\infty$$

إشارة $f'(x)$: مما سبق $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$ وعليه :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

• جدول التغيرات :

$$= 27 [e^{-0,1n} - e^{-0,1n-0,1}] = 27 e^{-0,1n} [1 - e^{-0,1}]$$

لدينا : $1 - e^{-0,1} \approx 0,095$ إذن : $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه : (U_n) متتالية متزايدة تماما .

- تعيين عدد السنوات بحيث : $U_n > 72$

أي : $80 - 27e^{-0,1n} > 72$ ومنه : $-27e^{-0,1n} > -8$

إذن : $e^{-0,1n} < \frac{8}{27}$ أي : $e^{-0,1n} < 0,3$

ومنه : $-0,1n < \ln 0,3$ ومنه : $n > \frac{-\ln 0,3}{0,1}$

إذن : $n > 12,039$ ومنه : $n = 13$

إذن ابتداء من 13 سنة يزيد الإنتاج عن 72 .

(3) * تبيان أن (V_n) متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = e^{-0,1(n+1)} = e^{-0,1n-0,1} = e^{-0,1n} \times e^{-0,1}$$

وعليه : $V_{n+1} = V_n \times e^{-0,1}$

ومنه : (V_n) متتالية هندسية أساسها $e^{-0,1}$ أي : $q = \frac{1}{e^{0,1}}$

* حساب S :

$$S = V_1 \times \frac{1 - q^{12}}{1 - q} = e^{-0,1} \times \frac{1 - (e^{-0,1})^{12}}{1 - e^{-0,1}}$$

$$S = e^{-0,1} \times \frac{1 - e^{-1,2}}{1 - e^{-0,1}} \quad \text{ومنه :}$$

التمرين 16 :

(1-1) - تبيان أن : $f(-x) + f(x) = 2$

لدينا : $D_f = \mathbb{R}$

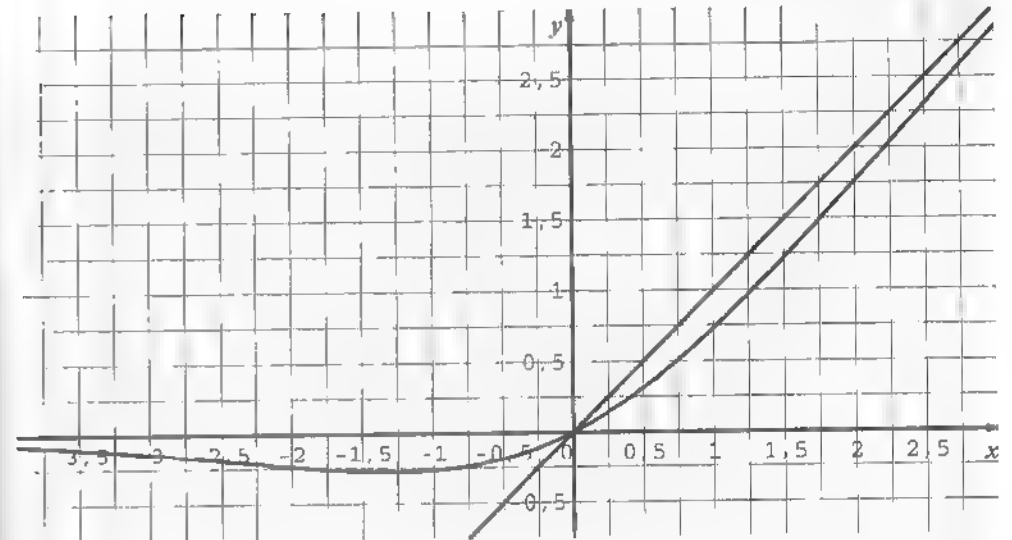
$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\frac{3}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

ومنه $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ للمنحنى (C)

- إنشاء (C) :

لدينا : $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$



التمرين 15 :

1- تعيين a و b :

$A \in (C)$ معناه : $f(0) = 53$ ومنه : $80 + a = 53$ أي : $a = -27$

$B \in (C)$ معناه : $f(3) = 60$ ومنه : $80 - 27e^{3b} = 60$

أي : $27e^{3b} = 20$ إذن : $e^{3b} = \frac{20}{27}$ ومنه : $3b = \ln \frac{20}{27}$

أي : $b = \frac{1}{3} \ln \frac{20}{27}$ وباستعمال آلة حاسبة نجد : $b \approx -0,1$

ومنه : $f(x) = 80 - 27e^{-0,1x}$

(2) $U_n = 80 - 27e^{-0,1n}$

- تبيان أن (U_n) متزايد تماما :

$$U_{n+1} - U_n = 80 - 27e^{-0,1(n+1)} - 80 + 27e^{-0,1n}$$

- استنتاج التغيرات :

$f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على \mathbb{R} لدينا :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	3

(4) معادلة المماس (Δ) : $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

لدينا : $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$

إن : $y = 1(x - 0) + 1$ وعليه : $y = x + 1$ هي معادلة (Δ) .

(5) نبيان أن : $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$

لدينا : $D_f = \mathbb{R}$ و $g'(x) = f'(x) - 1$

$$g'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x - e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-(e^{2x} - 2e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{-(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

إشارة $g(x)$: $g(0) = f(0) - 1 = 0$

لدينا :

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3 - e^x + 3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{2e^x + 2}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1}$$

ومنه : $f(-x) + f(x) = 2$

- استنتاج وجود مركز تناظر :

لدينا : $f(-x) + f(x) = 2$ ومنه : $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$

وعليه هي من الشكل : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

ومنه النقطة $\omega(0 ; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (Γ) .

(2) - حساب النهايات : $D_f =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times \left(3 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \times \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 3$$

- استنتاج معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

فإن : $y = -1$ معادلة المستقيم المقارب عند $-\infty$.

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ فإن : $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب عند $+\infty$.

(3) - حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(3e^x + 3 - 3e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(4)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

الآن (D) يقطع (Γ) في نقطة فاصلتها α مع $2 < \alpha < 3$

$$f'(x) = 4 \left[\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right] \quad \text{1-III) تبين أن :}$$

$$4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right) = 4 \times \left[\frac{e^x + 1 - 1}{(e^x + 1)^2} \right] \quad \text{لدينا :}$$

$$4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = f'(x) \quad \text{ومنه :}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{تبين أن :}$$

$$e^2 \leq e^x \leq e^3 \quad \text{ومنه :} \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$e^2 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^3 + 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{1}{e^2 + 1} \geq \frac{1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{e^3 + 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{4}{e^3 + 1} \leq \frac{4}{e^x + 1} \leq \frac{4}{e^2 + 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$f'(x) = 4 \left[\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right] \quad \text{والدينا :}$$

$$\frac{4}{e^x + 1} \leq \frac{4}{(e^x + 1)^2} \leq \frac{4}{e^x + 1} \quad \text{والدينا :}$$

$$4 \left(\frac{4}{e^x + 1} - \frac{4}{(e^x + 1)^2} \right) \leq \frac{4}{e^x + 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^x + 1} \quad \text{والآن :}$$

$$0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^x + 1} \leq \frac{4}{e^2 + 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{4}{e^2 + 1} \approx 0,48 \quad \text{لكن :} \quad 0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^2 + 1}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{ومنه :} \quad 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

- استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (Γ) و (Δ) :

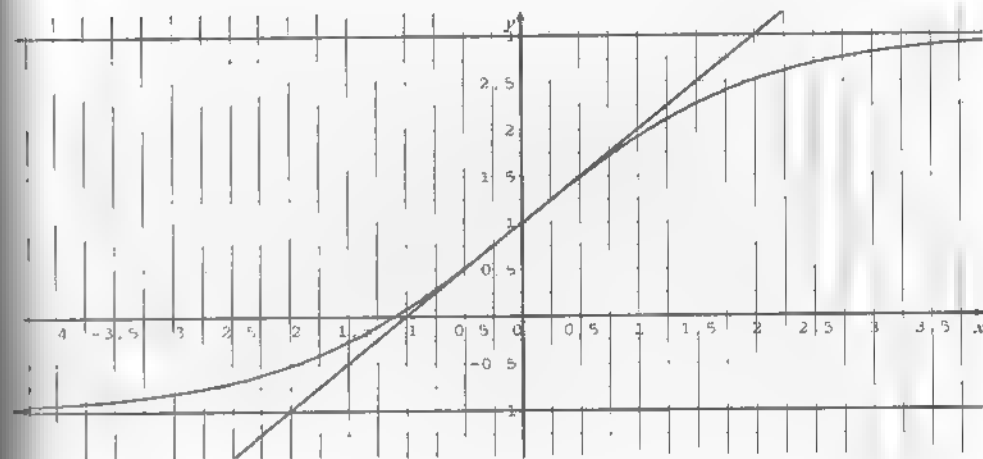
$$f(x) - y = f(x) - (x + 1) = g(x)$$

ومنه : (Γ) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; 1)$

في المجال $] -\infty; 0[$: (Γ) يقطع فوق (Δ)

في المجال $] 0; +\infty[$: (Γ) يقطع تحت (Δ) .

(6) إنشاء (Γ) و (Δ) :



1-II) تبين أن المعادلة : $f(x) = x$ تكافئ $g(x) = -1$

$f(x) = x$ تكافئ : $g(x) = x - (x + 1) = -1$ وعليه : $g(x) = -1$

(2) تبين أن (D) يقطع (Γ) :

نحل المعادلة : $f(x) = x$ أي $g(x) = -1$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على \mathbb{R}

حيث : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

ومنه g تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} وعليه المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلاً وحيداً.

ولدينا : $g(3) = f(3) - 4$ أي : $g(3) \approx -1,1$

$g(2) = f(2) - 3$ أي : $g(2) \approx -0,4$

وبما أن : $2 < \alpha < 3$ فإن : $g(3) < -1 < g(2)$

6 - الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1- اللوغاريتم النيبيري لعدد :

مبرهنة 1 :

من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماماً يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث :

$e^\alpha = a$. العدد α يسمى اللوغاريتم النيبيري للعدد a ونكتب : $\alpha = \ln a$.

مثال : العدد α بحيث : $e^\alpha = 5$ هو : $\alpha = \ln 5$

أي أن : $e^{\ln 5} = 5$

نتائج :

• بما أن $e^0 = 1$ فإن : $\ln 1 = 0$.

• من أجل كل عدد حقيقي موجب a : $e^{\ln a} = a$.

• من أجل كل عدد حقيقي a : $\ln(e^a) = a$.

مبرهنة 2 :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبان تماماً a و b :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

نتائج :

a و b أعداد حقيقية موجبة تماماً ، r عدد ناطق

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad (2) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad (1)$$

$$\ln a^r = r \ln a \quad (3)$$

أمثلة :

$$\ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3 \quad * \quad \ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 \quad *$$

$$\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2 \quad * \quad \ln \frac{1}{5} = -\ln 5 \quad *$$

$$\ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad *$$

2- الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

نسمي دالة اللوغاريتم النيبيري الدالة \ln التي ترفق بكل عدد حقيقي x من

$]-\infty; 0[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

مبرهنة 3 :

الدالة $\ln x$ متصلة الاشتقاق على $]-\infty; 0[$.

- الدالة $x \mapsto \ln x$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند 1 للدالة : $x \mapsto \frac{1}{x}$

مبرهنتات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

مبرهنة 4 :

مشتقة الدالة : $x \mapsto \ln[u(x)]$ حيث u دالة موجبة تماماً وتقبل الاشتقاق على المجال I

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{هي الدالة :}$$

مثال :

مشتقة الدالة $x \mapsto \ln(x^2 - 4)$ على كل من المجالين $]-2; -\infty[$ و $]+\infty; 2[$

$$x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 4} \quad \text{هي الدالة :}$$

مبرهنة 5 :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ حيث u دالة موجبة على مجال I

هي الدالة : $c \in \mathbb{R} , x \mapsto \ln(u(x)) + c$

مثال :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$ على المجال $]-1; +\infty[$: 1

هي الدالة : $c \in \mathbb{R} , x \mapsto \ln(x^2 - 1) + c$

الدالة اللوغاريتمية العشرية :

الدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$ تسمى الدالة اللوغاريتمية العشرية ونرمز لها بالرمز Log

التمارين

التمرين 1 :

ضع العلامة \checkmark أماما كل جملة صحيحة و العلامة \times أماما كل جملة خاطئة .

☐ (1) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ حيث a و b عدنان موجبان تماما .

☐ (2) $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما .

☐ (3) $(\ln x)^n = n \ln x$ حيث : $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

☐ (4) $\ln x > 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما .

☐ (5) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ حيث $x \in \mathbb{R}_+^*$.

☐ (6) $\ln \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\ln x}{\ln y}$ حيث x و y عدنان حقيقيان موجبان تماما .

☐ (7) الدالة المشتقة للدالة $\ln 2x \mapsto x$ على $]0; +\infty[$.

هي الدالة : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

☐ (8) $\ln 0 = 1$.

☐ (9) $\ln 2^{2007} = 2007 \ln 2$.

☐ (10) $\ln(-x) = -\ln x$: x عدد حقيقي سالب تماما .

التمرين 2 :

بسط العبارة التالية :

(1) $4 \ln \sqrt{e} - 5 \ln(e^3)$ ؛ $\ln e \sqrt{e} + \frac{\ln e^4}{\ln e^{-2}}$ (2)

(3) $\ln(8^{10}) + \ln \frac{1}{256}$ ؛ $\ln(100) - \ln(0,0005)$ (4)

(5) $\ln(2 \times 10^8) - \ln(10^{-5})$.

التمرين 3 :

حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

1) $\ln(x+6) + \ln(x+7) = \ln 42$

2) $\ln(x-1) + \ln(x-4) = \ln(x^2-9)$

3) $\ln|x+4| + \ln|x+1| = \ln|x^2-4|$

4) $\ln(2x-1) - \ln(x+1) = \ln 2x$

5) $(\ln x)^2 - 7 \ln x + 12 = 0$

أي أن : $\text{Log} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ ؛ إذن : $\text{Log} x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$

مبرهنات :

a و b عدنان حقيقيان موجبان تماما r عدد ناطق :

(1) $\text{Log}(a \times b) = \text{Log} a + \text{Log} b$

(2) $\text{Log} \frac{a}{b} = \text{Log} a - \text{Log} b$

(3) $\text{Log} a^r = r \text{Log} a$

(4) مشتق الدالة Log :

بوضع : $f(x) = \text{Log} x$ نجد : $f(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \ln x$

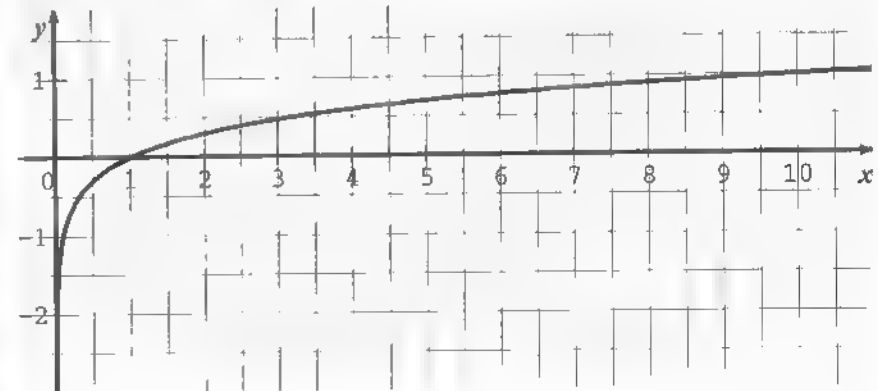
ومنه : $f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$

ومنه : $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln 10} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 10} \ln x = +\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



$$6) f(x) = \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right) ; I =]-\infty ; -2[$$

$$7) f(x) = (x \ln x)^2 ; I =]0 ; +\infty[$$

$$8) f(x) = \ln (\sin x) ; I =]0 ; \pi[$$

$$3) f(x) = \ln (1 + \cos x) ; I = \mathbb{R}$$

$$10) f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) ; I =]0 ; +\infty[$$

التمرين 8 :

احسب نهايات الدوال الآتية عند أطراف المجال I في كل حالة مما يلي :

$$1) f(x) = \frac{-4}{x} + 3 \ln x ; I =]0 ; +\infty[$$

$$2) g(x) = -x^2 + 2 \ln x ; I =]0 ; +\infty[$$

$$3) h(x) = (4 - x) \ln x ; I =]0 ; +\infty[$$

$$4) T(x) = \frac{1}{\ln x} ; I =]1 ; +\infty[$$

$$5) S(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) ; I =]1 ; +\infty[$$

$$6) p(x) = \frac{\ln (x^2 + x + 4)}{x} ; I = \mathbb{R}^*$$

$$7) L(x) = x \ln (x^2) ; I =]-\infty ; 0[$$

$$8) M(x) = \sqrt{x} \ln x ; I =]0 ; +\infty[$$

$$9) Q(x) = \ln (4x - 1) - \ln x ; I = \left] \frac{1}{4} ; +\infty \right[$$

$$10) R(x) = \frac{\ln (x+1)}{\ln (x-1)} ; I =]2 ; +\infty[$$

التمرين 9 :

ادرس تغيرات كل من الدوال f المعرفة كما يلي ثم مثلها بألة بيانية :

$$1) f(x) = \ln (1 - x) \quad 2) f(x) = \ln \left(\frac{2}{x-2} \right)$$

$$6) 16 (\ln x)^2 = 81$$

التمرين 4 :

حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية :

$$\ln 2x < 1 \quad (2) ; \quad \ln x > -1 \quad (1)$$

$$x \ln x - x < 0 \quad (4) ; \quad \ln (x+3) \geq 4 \quad (3)$$

$$-(\ln x)^2 + 3 \ln x + 4 \leq 0 \quad (5) ; \quad \ln (x^2) - 4 \leq 0 \quad (5)$$

التمرين 5 :

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ الجملة الآتية :

$$1) \begin{cases} x + y = 40 \\ \ln x + \ln y = \ln 300 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln \left(\frac{x}{y} \right) = 4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \ln (x-2) + \ln (y-1) = 8 \\ \ln (x-2) - \ln (y-1) = 4 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \ln (xy^2) = 1 \\ \ln \left(\frac{x}{y} \right) = -4 \end{cases}$$

التمرين 6 :

دون استعمال الآلة الحاسبة ادرس إشارة كل من A, B, C, D .

$$1) A = 5 \ln 7 - 6 \ln 9 \quad 2) B = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3$$

$$3) C = \frac{\ln 7}{\ln 11} \quad 4) D = \ln (\sqrt{3} - 1)$$

ثم احسب القيم المقربة إلى 10^{-3} لكل منهما باستعمال آلة حاسبة.

التمرين 7 :

عين مشتقة الدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I .

$$1) f(x) = -x \ln x + x - \frac{1}{x} ; I =]0 ; +\infty[$$

$$2) f(x) = (x^2 - 1) \ln x + x^2 ; I =]0 ; +\infty[$$

$$3) f(x) = \frac{\ln x}{x} ; I =]0 ; +\infty[$$

$$4) f(x) = \ln (x^2 - 4) ; I =]2 ; +\infty[$$

$$5) f(x) = \frac{1}{\ln x} ; I =]1 ; +\infty[$$

التمرين 12 :

1- لتكن الدالة g المعرفة على $+\infty[$; $0]$ بالعلاقة :

$$g(x) = x \ln x - x + 1$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الوحدة 2 cm .

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) ادرس إشارة $g(x)$.

(3) ليكن (C') التمثيل البياني للدالة $\ln x \mapsto x$ في المعلم السابق . بين أن

(C) و (C') يشتركان في نقطتين فاصلتهما 1 و e وأنه من أجل كل عدد

حقيقي x من المجال $[1; e]$ فإن : $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $+\infty[$; $1]$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f . (يمكن كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$).

(2) أنشئ تمثيلا بيانيا (Γ) للدالة f في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

III - (1) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α

حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$.

(2) نعتبر الدالة h المعرفة على $+\infty[$; $1]$ بالعلاقة : $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

• بين أن α حلا للمعادلة $h(x) = x$

• ادرس اتجاه تغير الدالة h .

• نضع $I = [3; 4]$. بين أنه من أجل كل عدد x من I فإن : $h(x) \in I$

ولن : $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

(3) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}, n \geq 0$$

برهن على صحة ما يلي : (من أجل كل عدد طبيعي n)

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha| \quad (n)$$

$$3) f(x) = \ln |x - 4|$$

$$4) f(x) = \ln (2x - 4)'$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

$$6) f(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$$

$$7) f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$8) f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln |x-1|$$

التمرين 10 :

عين على المجال I الدوال الأصلية لكل دالة مما يلي :

$$1) f(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-2} ; I =]2; +\infty[$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x+2} ; I = \left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$$

$$3) f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5} ; I = \mathbb{R}$$

$$4) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} ; I =]0; \pi[$$

$$5) f(x) = \frac{\ln x}{x} ; I =]0; +\infty[$$

$$6) f(x) = \frac{1}{x \ln x} ; I =]0; 1[$$

$$7) f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} ; I =]-\infty; +\infty[$$

$$8) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ; I = \mathbb{R}$$

التمرين 11 :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 18x + 39}{x^2 - 9x + 20}$$

فدالة معرفة بالعلاقة :

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) عين ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من D

$$f(x) = a + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{x-5}$$

تكون :

(3) عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال $+\infty[$; $5]$.

(4) عين الدالة الأصلية التي تنعدم عند $x = 6$.

التمرين 14 :

1- لتكن f دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$; بالعلاقة :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) استنتج إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$.

II- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

(1) احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

(2) لاحظ أن : $g = h \circ k$ حيث h و k دالتين معرفتان على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} ; \quad k(x) = \frac{1}{x}$$

- استنتج نهايات الدالة g .

- ثم استنتج جدول التغيرات .

III- لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* : بالعلاقة :

$$U_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

(1) احسب $\ln(U_n)$.

(2) بين أن (U_n) متزايدة تماما.

(3) بين أن (U_n) متقاربة.

التمرين 15 :

(1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$g(x) = -8 \ln x + x^2 + 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$.

1- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2} \ln x$$

(1) بين أن :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

(ب) ادرس تغيرات الدالة f .

II- نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$h(x) = f(x) - \ln x$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad (b)$$

(c) المتتالية (U_n) متقاربة نحو α .

(4) عين عدد طبيعي p بحيث مما سبق نستنتج أن U_p قيمة مقربة إلى 10^{-3}

للعدد α مبينا قيمة عشرية مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

التمرين 13 :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 4 cm.

1- بين أن :

$$f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

2- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$g(x) = \ln x + x + 1$$

(أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]0; +\infty[$.

(ب) عين إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f على هذا المجال.

(ج) بين أن : $f(\beta) = -\beta$.

3- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(ب) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

(ج) نعرف الدالة F على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & , x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة F عند 0 من اليمين .

4- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) ادرس إشارة $f(x) - \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$.

5- ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $\ln x \mapsto x$ أنشئ في نفس المعلم

المنحنيان (Γ) و (C).

التمرين 14 :

I- لتكن f دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) استنتج إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$.

II- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

(1) احسب $g'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

(2) لاحظ أن : $g = h \circ k$ حيث h و k دالتين معرفتان على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad ; \quad k(x) = \frac{1}{x}$$

- استنتج نهايات الدالة g .
- ثم استنتج جدول التغيرات.

III- لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* : بالعلاقة :

$$U_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

(1) احسب $\ln(U_n)$.

(2) بين أن (U_n) متزايدة تماما.

(3) بين أن (U_n) متقاربة.

التمرين 15 :

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$g(x) = -8 \ln x + x^2 + 4$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$.

3- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2} \ln x$$

(أ) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

(ب) ادرس تغيرات الدالة f .

(II) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$h(x) = f(x) - \ln x$$

$$U_n - \alpha \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad (b)$$

(c) المتتالية (U_n) متقاربة نحو α .

(4) عين عدد طبيعي p بحيث مما سبق نستنتج أن U_p قيمة مقربة إلى 10^{-3}

للعدد α مبينا قيمة عشرية مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

التمرين 13 :

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 4 cm.

1- بين أن :

$$f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

2- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$: بالعلاقة :

$$g(x) = \ln x + x + 1$$

(أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]0; +\infty[$.

(ب) عين إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f على هذا المجال.

(ج) بين أن : $f(\beta) = -\beta$.

3- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(ب) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

(ج) نعرف الدالة F على $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & , x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة F عند 0 من اليمين.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) ادرس إشارة $f(x) - \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$.

5- ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $\ln x \mapsto x$ أنشئ في نفس المعلم

المنحنيان (Γ) و (C).

1- ادرس إشارة $h(x)$.

2- استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) للدالة f و المنحنى (Γ)

الدالة : $x \mapsto \ln x$.

3- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (Γ) ؟

4- أنشئ (C) و (Γ) في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2 cm).

حيث ننشئ المماسين للمنحنيين عند النقطة ذات الفاصلة 1.

التمرين 16 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = x + 3 + \ln \frac{|x| + 1}{x + 2}$

1- عين مجموعة التعريف D للدالة f .

2- ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

3- ادرس تغيرات الدالة f .

4- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - 3)$ ؛ ماذا تستنتج ؟

5- أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

التمرين 17 :

حل في \mathbb{R} المعادلات الآتية :

$$\log(x^2 - 1) = \log x \quad ; \quad \log x + \log(-x + 5) = \log 4$$

$$\log x - \log(x + 1) = 1$$

التمرين 18 :

ادرس تغيرات كل من الدوال الآتية ذات المتغير الحقيقي x ثم مثلها بيانيا في مستو منسوب إلى

معلم متعامد :

$$f : x \mapsto \log |x| \quad (1)$$

$$g : x \mapsto \frac{1 - \log x}{x} \quad (2)$$

$$h : x \mapsto \frac{\log x}{x} \quad (3)$$

التمرين 19 :

- ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f : x \mapsto (\log x)^2$$

- أنشئ (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس .

التمرين 20 :

- ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f : x \mapsto \log(x - 4)(1 - x)$$

- أنشئ (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس .

الحلول

التمرين 1 :

$$(1) \quad \boxed{\times} \quad (2) \quad \boxed{\sqrt{}} \quad (3) \quad \boxed{\times} \quad (4) \quad \boxed{\times}$$

$$(5) \quad \boxed{\sqrt{}} \quad (6) \quad \boxed{\times} \quad (7) \quad \boxed{\sqrt{}} \quad (8) \quad \boxed{\times}$$

$$(9) \quad \boxed{\sqrt{}} \quad (10) \quad \boxed{\times}$$

التمرين 2 :

التبسيط :

$$\begin{aligned} 1) \quad 4 \ln \sqrt{e} - 5 \ln(e^3) &= 4 \ln e^{\frac{1}{2}} - 3 \times 5 \times \ln e \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \ln e - 15 \times 1 \\ &= 2 - 15 = -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 4 \ln e \sqrt{e} + \frac{\ln e^4}{\ln e^{-2}} &= \ln \left(e^4 \cdot e^{\frac{1}{2}} \right) + \frac{4 \ln e}{-2 \ln e} \\ &= \ln e^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{2} = \frac{3}{2} \ln e - 2 \\ &= \frac{3}{2} - 2 = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

أي: $x > 1$ و $x > 4$ و $x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ و بالتالي: $x > 4$. وعليه مجموعة التعريف: $D =]4; +\infty[$.

المعادلة تكافئ: $\ln(x-1)(x-4) = \ln(x^2-9)$

ومنه: $x^2 - 5x + 4 = x^2 - 9$ أي أن: $(x-1)(x-4) = x^2 - 9$ وعليه: $-5x + 4 = -9$ أي: $-5x = -13$

وبالتالي: $x = \frac{13}{5}$ مرفوض: $S = \emptyset$.

(1) لدينا: $\ln|x+4| + \ln|x+1| = \ln|x^2-4|$

لتكون المعادلة معرفة من أجل: $x+4 \neq 0$ و $x+1 \neq 0$

و $x^2 - 4 \neq 0$ ومنه: $x \neq -4$ و $x \neq -1$ و $x \neq 2$ و $x \neq -2$. وعليه: $D = \mathbb{R} - \{-4; -2; -1; 2\}$.

المعادلة تكافئ: $\ln|(x+4)(x+1)| = \ln|x^2-4|$

وعليه: $|(x+4)(x+1)| = |x^2-4|$

أي: $|x^2+5x+4| = |x^2-4|$

$$\begin{cases} 5x = -8 \\ 2x^2 + 5x = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 4 = x^2 - 4 \\ x^2 + 5x + 4 = -x^2 + 4 \end{cases}$$

وعليه: $x = -\frac{8}{5}$ أو $x = \frac{-5}{2}$ أو $x = 0$.

مجموعة الحلول: $S = \left\{ -\frac{5}{2}; -\frac{8}{5}; 0 \right\}$.

(2) لدينا: $\ln(2x-1) - \ln(x+1) = \ln 2x$

لتكون المعادلة معرفة من أجل: $x > 0$ و $x+1 > 0$ و $2x-1 > 0$

و $x > -1$ و $x > \frac{1}{2}$ وعليه: $x > \frac{1}{2}$.

مجموعة التعريف: $D = \left] \frac{1}{2}; +\infty[\right.$

لدينا: $\ln \frac{2x-1}{x+1} = \ln 2x$

$$3) \ln(8^{10}) + \ln\left(\frac{1}{256}\right) = 10 \cdot \ln 8 - \ln(256)$$

$$= 10 \times \ln 2^3 - \ln 2^8$$

$$= 3 \times 10 \ln 2 - 8 \ln 2$$

$$= 30 \ln 2 - 8 \ln 2 = 22 \ln 2$$

$$4) \ln 100 - \ln(0,0005) = \ln 100 - \ln(5 \times 10^{-4})$$

$$= \ln(2^2 \times 5^2) - [\ln 5 + \ln 10^{-4}]$$

$$= \ln 2^2 + \ln 5^2 - \ln 5 - \ln 10^{-4}$$

$$= 2 \ln 2 + 2 \ln 5 - \ln 5 + 4 \ln 10$$

$$\ln 100 - \ln(0,0005) = 2 \ln 2 + \ln 5 + 4 \cdot [\ln 2 + \ln 5]$$

$$= 2 \ln 2 + \ln 5 + 4 \ln 2 + 4 \ln 5$$

$$= 6 \ln 2 + 5 \ln 5$$

$$5) \ln(2 \times 10^8) - \ln(10^{-5}) = \ln 2 + 8 \ln 10 + 5 \ln 10$$

$$= \ln 2 + 13 \ln 10$$

$$= \ln 2 + 13(\ln 2 + \ln 5)$$

$$= \ln 2 + 13 \ln 2 + 13 \ln 5$$

$$= 14 \ln 2 + 13 \ln 5$$

التمرين 3:

حل المعادلات:

$$(1) \ln(x+6) + \ln(x+7) = \ln 42$$

لتكون المعادلة معرفة من أجل: $x+6 > 0$ و $x+7 > 0$

أي: $x > -6$ و $x > -7$

وعليه مجموعة التعريف: $D =]-6; +\infty[$.

المعادلة تكافئ: $\ln(x+6)(x+7) = \ln 42$

وعليه: $(x+6)(x+7) = 42$

ومنه: $x^2 + 7x + 6x + 42 = 42$

أي أن: $x^2 + 13x = 0$

ومنه: $x(x+13) = 0$ أي $x = 0$ أو $x = -13$ (مرفوض)

ومنه: $x = 0$. مجموعة حلول المعادلة: $S = \{0\}$.

$$(2) \ln(x-1) + \ln(x-4) = \ln(x^2-9)$$

وبالتالي : $\frac{2x-1}{x+1} = 2x$ ومنه : $2x-1 = 2x(x+1)$

أي : $2x-1 = 2x^2 + 2x$

وبالتالي : $2x^2 + 1 = 0$ وهي مستحيلة الحل .

(5) لدينا : $(\ln x)^2 - 7 \ln x + 12 = 0$

تكون معادلة معرفة من أجل : $x > 0$.

و بوضع $\ln x = z$ نجد : $z^2 - 7z + 12 = 0$

$\Delta = 1$ لدينا : ومنه للمعادلة حلين $z_1 = 3$ و $z_2 = 4$

من أجل $z = 3$ نجد : $\ln x = 3$ ومنه : $x = e^3$

من أجل $z = 4$ نجد : $\ln x = 4$ ومنه : $x = e^4$

مجموع حلول المعادلة : $S = \{e^3 ; e^4\}$

(6) لدينا : $16(\ln x)^2 = 81$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$

المعادلة تكافئ : $(\ln x)^2 = \frac{81}{16}$

وبالتالي : $\ln x = -\frac{9}{4}$ أو $\ln x = \frac{9}{4}$

وعليه : $x = e^{-\frac{9}{4}}$ أو $x = e^{\frac{9}{4}}$

مجموع الحلول هي : $S = \left\{e^{-\frac{9}{4}} ; e^{\frac{9}{4}}\right\}$

التمرين 4 :

حل في \mathbb{R} المتراجحات التالية :

(1) لدينا : $\ln x > -1$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$

المتراجحة تكافئ : $\ln x > \ln e^{-1}$ ومنه : $x > e^{-1}$

ومنه مجموعة الحلول : $S =]e^{-1} ; +\infty[$

(2) لدينا : $\ln 2x < 1$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$

المتراجحة تكافئ : $\ln 2x < \ln e$ وعليه : $2x < e$ أي : $x < \frac{1}{2}e$

لكن : $x > 0$ ومنه مجموعة الحلول : $S =]0 ; \frac{1}{2}e[$

(3) لدينا : $\ln(x+3) \geq 4$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x+3 > 0$ أي : $x > -3$.

المتراجحة تكافئ : $\ln(x+3) \geq \ln e^4$

ومنه : $x+3 \geq e^4$ أي : $x \geq e^4 - 3$

اذن مجموعة الحلول : $S =]e^4 - 3 ; +\infty[$

(4) لدينا : $x \ln x - x < 0$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$.

المتراجحة تكافئ : $x(\ln x - 1) < 0$

x	0	e	$+\infty$
x	0	+	+
$\ln x - 1$	-	0	+
$x(\ln x - 1)$	-	0	+

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة : $S =]e ; +\infty[$

(5) لدينا : $\ln x^2 - 4 \geq 0$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x \neq 0$.

المتراجحة تكافئ : $\ln x^2 \geq 4$ أي : $\ln x^2 \geq \ln e^4$

وعليه : $x^2 \geq e^4$ أي : $|x| \geq e^2$

ومنه : $x \geq e^2$ أو $x \leq -e^2$

اذن مجموعة حلول المتراجحة : $S =]-\infty ; -e^2[\cup]e^2 ; +\infty[$

(6) لدينا : $-(\ln x)^2 + 3 \ln x + 4 \leq 0$

تكون المتراجحة معرفة من أجل : $x > 0$

بوضع $\ln x = z$ نجد : $-z^2 + 3z + 4 \leq 0$

لاحظ : $-1 + 4 = 3$ ومنه يوجد جذران هما : $z_1 = -1$ و $z_2 = 4$

وبالتالي : $-z^2 + 3z + 4 = -(z+1)(z-4)$ لكن : $x = e^z$

وعليه : $-(\ln x)^2 + 3 \ln x + 4 = -(\ln x + 1)(\ln x - 4)$

اذن :

$$\begin{cases} y^2 = \frac{25}{e^8 + 1} \\ x = ye^4 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} (ye^4)^2 + y^2 = 25 \\ x = ye^4 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$y = \frac{-5}{\sqrt{e^8 + 1}} \text{ أو } y = \frac{5}{\sqrt{e^8 + 1}} \text{ وبالتالي}$$

$$x = \frac{5e^4}{\sqrt{e^8 + 1}} \text{ فإن } y = \frac{5}{\sqrt{e^8 + 1}} \text{ لما}$$

$$x = \frac{-5e^4}{\sqrt{e^8 + 1}} \text{ فإن } y = \frac{-5}{\sqrt{e^8 + 1}} \text{ لما}$$

إذن مجموع الحلول :

$$S = \left\{ \left(\frac{5e^4}{\sqrt{e^8 + 1}} ; \frac{5}{\sqrt{e^8 + 1}} \right), \left(\frac{-5e^4}{\sqrt{e^8 + 1}} ; \frac{-5}{\sqrt{e^8 + 1}} \right) \right\}$$

$$\begin{cases} \ln(x-2) + \ln(y-1) = 8 \\ \ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \end{cases} \text{ لدينا : (3)}$$

$$\text{تكون الجملة معرفة من أجل : } x-2 > 0 \text{ و } y-1 > 0$$

وعليه : $x > 2$ و $y > 1$.

$$\begin{cases} \ln(x-2) + \ln(y-1) = 8 \dots (1) \\ \ln(x-2) - \ln(y-1) = 4 \dots (2) \end{cases} \text{ الجملة تكافئ :}$$

$$2\ln(x-2) = 12 \text{ أي : } \ln(x-2) = 6$$

$$\text{وبالتالي : } \ln(x-2) = \ln e^6 \text{ ومنه : } x-2 = e^6 \text{ أي : } x = 2 + e^6$$

$$\text{وبالتعويض في المعادلة (1) نجد : } \ln(y-1) = 2$$

$$\text{أي : } \ln(y-1) = \ln e^2 \text{ ومنه : } y-1 = e^2 \text{ أي : } y = 1 + e^2$$

$$\text{إذن مجموع الحلول : } S = \{ (2+e^6 ; 1+e^2) \}$$

$$\begin{cases} \ln(xy^2) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -4 \end{cases} \text{ لدينا : (4)}$$

$$\text{تكون الجملة معرفة من أجل : } x > 0 \text{ و } \frac{x}{y} > 0 \text{ و } y \neq 0$$

x	0	e^{-1}	e^4	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln x - 4$	-	-	0	+
$-(\ln x - 1)(\ln x - 4)$	-	0	+	-

$$\text{ومنه مجموعة حلول المترابطة : } S =]0 ; e^{-1}] \cup [e^4 ; +\infty[$$

التمرين 5 :
حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ الجمل التالية :

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \ln x + \ln y = \ln 300 \end{cases} \text{ لدينا : (1)}$$

$$\text{تكون الجملة معرفة من أجل : } x > 0 \text{ و } y > 0$$

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ \ln(xy) = \ln 300 \end{cases} \text{ الجملة تكافئ :}$$

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ xy = 300 \end{cases} \text{ وعليه : وبالتالي } x \text{ و } y \text{ هما حلين للمعادلة :}$$

$$z^2 - 40z + 300 = 0 \text{ لدينا : } \Delta = 1600 - 1200 \text{ أي : } \Delta = 400$$

$$\text{إذن للمعادلة حلين : } z_1 = 10 \text{ و } z_2 = 30$$

$$\text{وبالتالي : } (x ; y) = (10 ; 30) \text{ أو } (x ; y) = (30 ; 10)$$

$$\text{مجموعة الحلول : } S = \{(10 ; 30) ; (30 ; 10)\}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 4 \end{cases} \text{ لدينا : (2)}$$

$$\text{تكون الجملة معرفة من أجل : } \frac{x}{y} > 0 \text{ و } y \neq 0 \text{ أي : } xy > 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \frac{x}{y} = e^4 \end{cases} \text{ الجملة تكافئ : وعليه :}$$

* القيم المقربة إلى 10^3 لكل من A و B و C و D :

$$\begin{aligned} B &\approx -0,294 & A &\approx -3,454 \\ D &\approx -0,312 & C &\approx 0,812 \end{aligned}$$

التمرين 7 :

تعيين المشتقات :

(1) لدينا : $f(x) = -x \ln x + x - \frac{1}{x}$ ومنه :

$$f'(x) = -1 \cdot \ln x + (-x) \times \frac{1}{x} + 1 - \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\ln x - 1 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

إذن : $f'(x) = -\ln x + \frac{1}{x^2}$

(2) لدينا : $f(x) = (x^2 - 1) \ln x + x^2$ ومنه :

$$f'(x) = 2x \ln x + (x^2 - 1) \times \frac{1}{x} + 2x$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x - \frac{1}{x} + 2x$$

إذن : $f'(x) = 2x \ln x + 3x - \frac{1}{x}$

(3) لدينا : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ومنه : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \times \ln x}{x^2}$

إذن : $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

(4) لدينا : $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ ومنه : $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

(5) لدينا : $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ومنه : $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

ومنه : $x > 0$ و $y > 0$

$$\begin{cases} xy^2 = e \\ \frac{x}{y} = e^4 \end{cases} \text{ وعليه : } \begin{cases} \ln(xy^2) = \ln e \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln e^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy^2 = e \\ x = ye^4 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} y \cdot e^4 \times y^2 = e \\ x = ye^4 \end{cases} \text{ وبالتالي :}$$

$$\begin{cases} x = e^{-3} \times \sqrt[3]{e^2} \\ y = e \times \sqrt[3]{e^2} \end{cases} \text{ وبالتالي : } \begin{cases} y^3 = e^5 \\ x = ye^4 \end{cases} \text{ أي :}$$

$$S = \left\{ \left(e^{-3} \times \sqrt[3]{e^2} ; e \times \sqrt[3]{e^2} \right) \right\} \text{ مجموعة الحلول :}$$

التمرين 6 :

* دراسة الإشارة :

(1) لدينا : $A = 5 \ln 7 - 6 \ln 9$ بما أن : $7 < 9$ فإن : $\ln 7 < \ln 9$ ومنه : $5 \ln 7 < 6 \ln 9$ وبالتالي : $5 \ln 7 - 6 \ln 9 < 0$ أي أن : $A < 0$

(2) لدينا : $B = \ln \sqrt{5} - \ln 3$ أي : $B = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3$

بما أن : $\sqrt{5} < 3$ فإن : $\ln \sqrt{5} < \ln 3$ وبالتالي : $\ln \sqrt{5} - \ln 3 < 0$ أي أن : $B < 0$

(3) لدينا : $C = \frac{\ln 7}{\ln 11}$

بما أن : $\ln 7 > 0$ و $\ln 11 > 0$ فإن : $\frac{\ln 7}{\ln 11} > 0$ أي : $C > 0$

(4) لدينا : $D = \ln(\sqrt{3} - 1)$

بما أن : $\sqrt{3} - 1 < 1$ فإن : $\ln(\sqrt{3} - 1) < \ln 1$

وعليه : $\ln(\sqrt{3} - 1) < 0$ أي أن : $D < 0$

التمرين 8 :
حساب النهايات :

$$f(x) = \frac{-4}{x} + 3 \ln x \quad : \text{لدينا (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-4}{x} + 3 \ln x \right) = -\infty \quad : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{x} + 3 \ln x \right) = +\infty$$

$$g(x) = -x^2 + 2 \ln x \quad : \text{لدينا (2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 2 \ln x) = -\infty \quad : \text{ومنه}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2 \ln x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$h(x) = (4 - x) \ln x \quad : \text{لدينا (3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - x) \ln x = -\infty \quad : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x) \ln x = -\infty$$

$$T(x) = \frac{1}{\ln x} \quad : \text{لدينا (4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \quad : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$S(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) \quad : \text{لدينا (5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = -\infty \quad : \text{ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x (\ln x)^2} \quad : \text{إن}$$

$$f(x) = \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right) \quad : \text{لدينا (6)}$$

$$f(x) = \ln |x-2| - \ln |x+2| \quad : \text{أي}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \quad : \text{ومنه} \quad f'(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} \quad : \text{إن}$$

$$f(x) = (x \ln x)^2 \quad : \text{لدينا (7) ومنه}$$

$$f'(x) = 2 (x \ln x) \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = 2 (x \ln x) (1 + \ln x) \quad : \text{إن}$$

$$f(x) = \ln(\sin x) \quad : \text{لدينا (8) ومنه} \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f(x) = \ln(1 + \cos x) \quad : \text{لدينا (9) ومنه} \quad f'(x) = \frac{-\sin x}{1 + \cos x}$$

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) \quad : \text{لدينا (10) ومنه}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (e^x + 1) - e^x (e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \times \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)} \quad : \text{إن}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\sqrt{x}) \ln(\sqrt{x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} M(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x}) \ln(\sqrt{x}) = +\infty \quad \text{و بالمثل نجد :}$$

$$Q(x) = \ln(4x - 1) - \ln x \quad \text{لدينا : (9)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} Q(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} [\ln(4x - 1) - \ln x] = -\infty \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{4x - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(4 - \frac{1}{x} \right) = \ln 4 \end{aligned}$$

$$R(x) = \frac{\ln(x + 1)}{\ln(x - 1)} \quad \text{لدينا : (10)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} R(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x + 1)}{\ln(x - 1)} = +\infty \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{\ln(x - 1)} - 1 + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1) - \ln(x - 1)}{\ln(x - 1)} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)}{\ln(x - 1)} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

التمرين 9 :

دأرة اتجاه تغير الدوال :

$$f(x) = \ln(1 - x) \quad \text{لدينا : (1)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x > 0\} \quad \text{مجموعة التعريف :}$$

$$\text{إذن : } x < 1 \quad \text{ومنه : } D_f =]-\infty ; 1[$$

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x) = +\infty$$

$$p(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 4)}{x} \quad \text{لدينا : (6)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 4)}{x} \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right]}{x} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2 \ln |x|}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-2 \ln(-x)}{-x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

و بالمثل نجد :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right] = 0$$

$$L(x) = 2x \ln|x| \quad \text{أي : } L(x) = x \ln(x^2) \quad \text{لدينا : (7) ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} L(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \ln(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \ln(-x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-2) (-x) \ln(-x) = 0$$

$$M(x) = \sqrt{x} \ln x \quad \text{لدينا : (8)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} M(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x \quad \text{ومنه :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$$

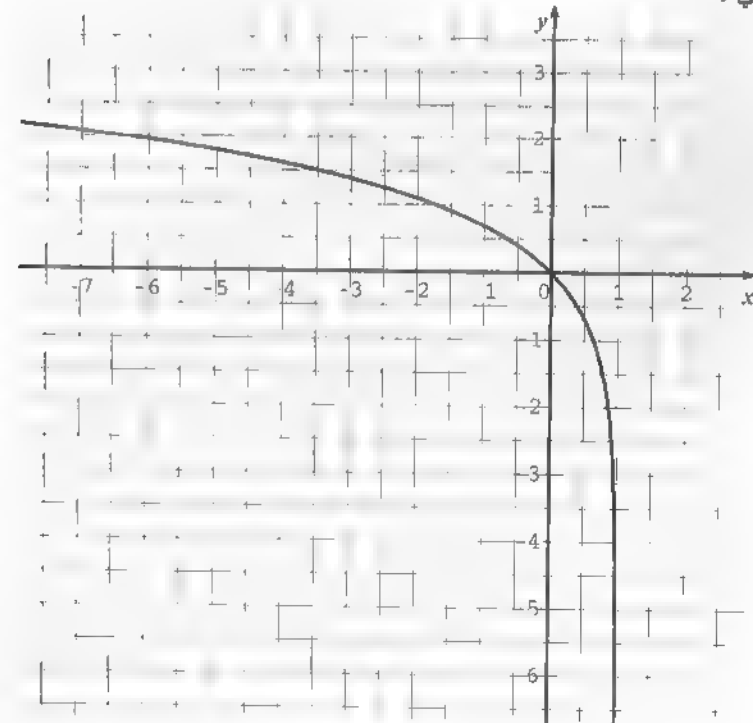
$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}$$

إذن : $f'(x) < 0$ لأن : $1-x > 0$.
وعليه f متناقصة تماما على D_f .

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

التمثيل البياني :



$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{x-2}\right)$$

• مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 > 0\}$

إذن : $D_f =]2; +\infty[$

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{2}{x-2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2}{x-2}\right) = -\infty$$

• تعيين المشتق :

$$f'(x) = \frac{\frac{-2}{(x-2)^2}}{\frac{2}{x-2}} = \frac{-2}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{2}$$

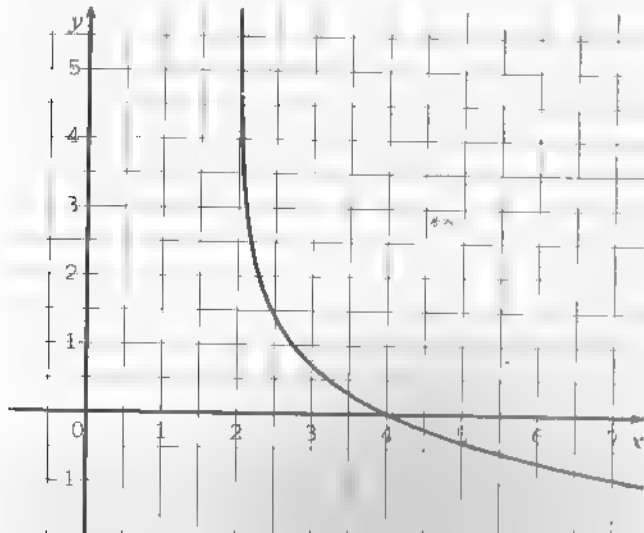
$$f'(x) = \frac{-1}{x-2}$$

وعليه : $f'(x) < 0$ لأن : $x-2 > 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على D_f .

• جدول التغيرات :

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

التمثيل البياني :



(4) لدينا : $f(x) = \ln(2x - 4)^2$ أي $f(x) = 2\ln|2x - 4|$

• مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \neq 0\}$

ومنه : $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\ln|2x - 4| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2\ln|2x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2\ln|2x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln|2x - 4| = +\infty$$

• تعيين المشتق : أي $f'(x) = 2 \times \frac{2}{2x - 4}$ أي $f'(x) = \frac{2}{x - 2}$

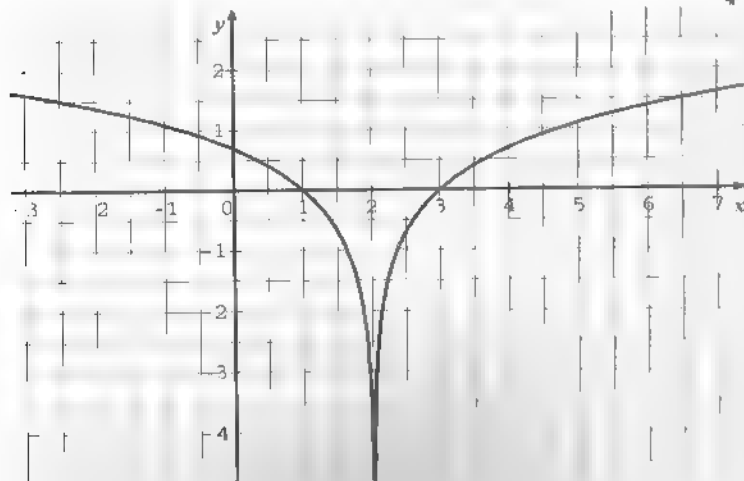
من أجل $x > 2$: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما .

من أجل $x < 2$: $f'(x) < 0$ وعليه f متناقصة تماما .

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

التمثيل البياني :



(3) لدينا : $f(x) = \ln|x - 4|$

• مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \neq 0\}$

وبالتالي : $D_f =]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x - 4| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \ln|x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \ln|x - 4| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x - 4| = +\infty$$

• تعيين المشتق : $f'(x) = \frac{1}{x - 4}$

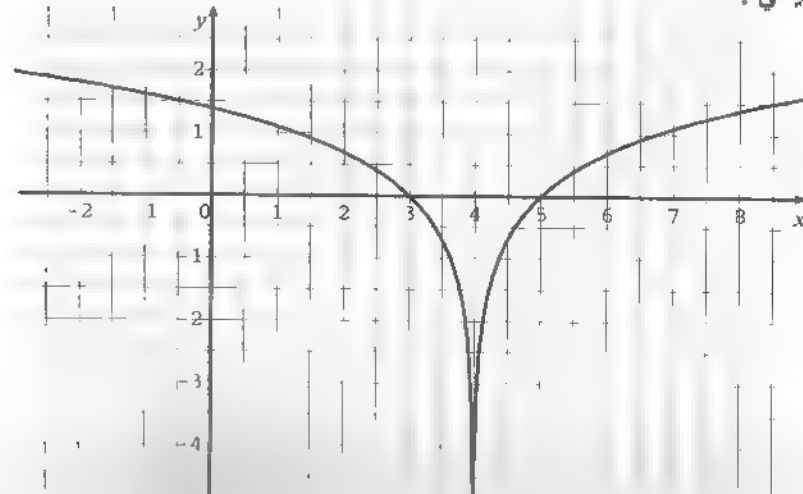
من أجل $x > 4$: $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما .

من أجل $x < 4$: $f'(x) < 0$ وعليه f متناقصة تماما .

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

التمثيل البياني :



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{1 - \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{1 - \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \ln x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{1}{x(1 - \ln x)^2} : \text{تعيين المشتق}$$

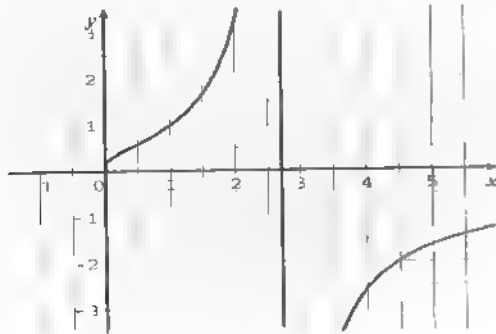
وعليه : $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على كل من المجالين :

$$]0 ; e[\text{ و }]e ; +\infty[$$

• جدول التغيرات :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	0 $\rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	

• التمثيل البياني :



$$f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| : \text{لدينا (7)}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} \neq 0 ; x+1 \neq 0 \right\} : \text{مجموعة التعريف}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x : \text{لدينا (5)}$$

• مجموعة التعريف : $D_f =]0 ; +\infty[$

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{-1 + x}{x^2} : \text{تعيين المشتق}$$

من أجل $x = 1$: $f'(x) = 0$

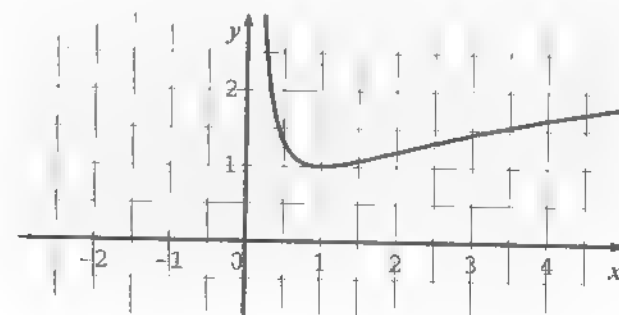
من أجل $x > 1$: $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما

من أجل $x < 1$: $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	$+\infty \rightarrow 1$	$1 \rightarrow +\infty$	

• التمثيل البياني :

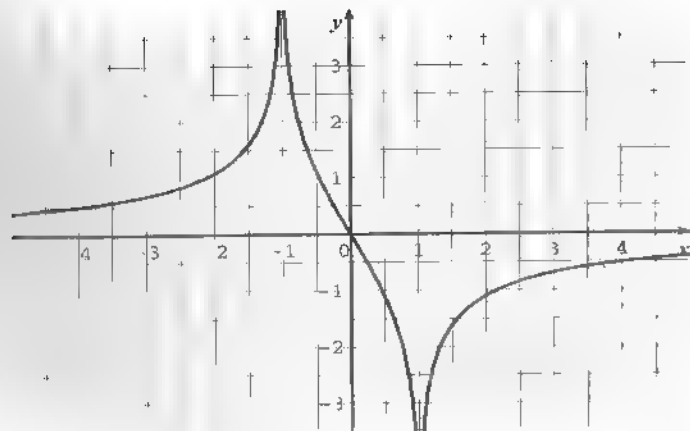


$$f(x) = \frac{1}{1 - \ln x} : \text{لدينا (6)}$$

• مجموعة التعريف : $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : 1 - \ln x \neq 0 ; x > 0 \}$

$1 - \ln x = 0$ معناه : $\ln x = 1$ ومنه : $x = e$

إذن : $D_f =]0 ; e[\cup]e ; +\infty[$



(8) لدينا : $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

• مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\}$

ومنه : $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \ln|x-1| \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(-x+1) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - (x-1) \ln(-x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + (1-x) \ln(1-x)}{x-1} = -\infty$$

و بالمثل نجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - (x-1) \ln(x-1)}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \ln(x-1) \right) = -\infty$$

• تعيين المشتق :

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1 - (x-1)}{(x-1)^2}$$

أي : $x \neq -1$ و $x \neq 1$

إذن : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

• حساب النهايات :

$$\left(\frac{x-1}{x+1} \right) \rightarrow 1 : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 0$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \rightarrow +\infty : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \rightarrow +\infty : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \rightarrow 0 : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\infty$$

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \rightarrow 0 : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -\infty$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1} \right) \rightarrow 1 : \text{لأن} : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 0$$

• تعيين المشتق :

لدينا : $f(x) = \ln|x-1| - \ln|x+1|$

ومنه : أي $f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x+1)(x-1)$	+	○	○	+
$f'(x)$	+	-	-	+

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $]1; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-1; 1[$

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
f(x)	0 \nearrow $+\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow$ 0	

• التمثيل البياني :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x+2} \quad \text{ومنه :}$$

$$g(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{3} \ln(3x+2) + c \quad \text{وبالتالي :}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5} \quad \text{(3) لدينا :}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \quad \text{ومنه :}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + c \quad \text{وبالتالي :}$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{(4) لدينا :}$$

$$g(x) = \ln(\sin x) + c \quad \text{وعليه :}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \times (\ln x)^1 : \text{أي } f'(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{(5) لدينا :}$$

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c \quad \text{ومنه :}$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} : \text{أي } f(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{(6) لدينا :}$$

$$g(x) = \ln |\ln x| + c \quad \text{وعليه :}$$

$$g(x) = \ln(-\ln x) + c \quad \text{فإن } I =]0; 1[\quad \text{وبما أن :}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{(7) لدينا :}$$

$$g(x) = \ln(e^x + 1) + c \quad \text{ومنه :}$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{(8) لدينا :}$$

$$g(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + C \quad \text{ومنه :}$$

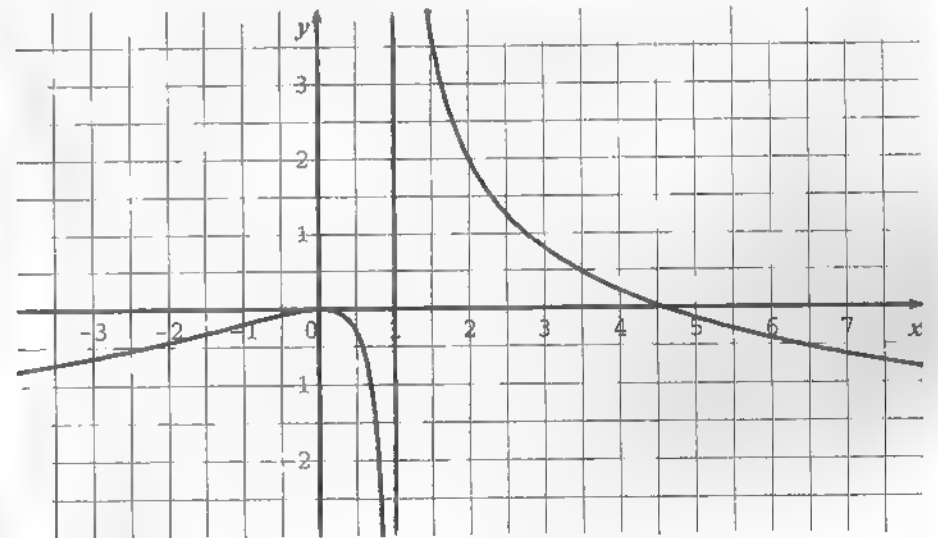
$$f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2} \quad \text{إن :}$$

من أجل $x = 0$: $f'(x) = 0$. من أجل $x > 0$: $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $[0; 1[$ و $]1; +\infty[$.

من أجل $x < 0$: $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على المجال $] -\infty; 0[$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$



التمرين 10 :
تعيين الدوال الأصلية g لكل دالة f وليكن c ثابت حقيقي .

$$f(x) = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-2} \quad \text{(1) لدينا :}$$

$$g(x) = \ln(x+4) - \ln(x-2) + c \quad \text{ومنه :}$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+4}{x-2}\right) + c \quad \text{أي :}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x+2} \quad \text{(2) لدينا :}$$

لدينا : $f(x) = \frac{2x^2 - 18x + 39}{x^2 - 9x + 20}$

(1) مجموعة التعريف : $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9x + 20 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $x^2 - 9x + 20 = 0$

لدينا : $\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين : $x_1 = 4$ و $x_2 = 5$.

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{4 ; 5\}$

(2) تعيين a, b, c :

لدينا : $f(x) = a + \frac{b}{x-4} + \frac{c}{x-5}$

وعليه : $f(x) = \frac{a(x-4)(x-5) + b(x-5) + c(x-4)}{(x-4)(x-5)}$

ومنه : $f(x) = \frac{a(x^2 - 9x + 20) + bx - 5b + cx - 4c}{x^2 - 9x + 20}$

إذن : $f(x) = \frac{ax^2 - 9ax + 20a + bx - 5b + cx - 4c}{x^2 - 9x + 20}$

وعليه : $f(x) = \frac{ax^2 + (-9a + b + c)x + 20a - 5b - 4c}{x^2 - 9x + 20}$

وبالتالي : $\begin{cases} a = 2 \\ b + c = 0 \\ -5b - 4c = -1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a = 2 \\ -9a + b + c = -18 \\ 20a - 5b - 4c = 39 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} a = 2 \\ b = +1 \\ c = -1 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -c \\ c = -1 \end{cases}$

وعليه : $f(x) = 2 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}$

(3) تعيين مجموعة الدوال الأصلية و لتكون g :

لدينا : $f(x) = 2 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}$

وعليه : $g(x) = 2x + \ln(x-4) - \ln(x-5) + c$

ومنه : $g(x) = 2x + \ln\left(\frac{x-4}{x-5}\right) + c$ حيث c ثابت حقيقي .

(4) تعيين الدالة الأصلية التي تنعدم عند 6 :

لدينا : $g(x) = 2x + \ln\left(\frac{x-4}{x-5}\right) + c$ وبما أن : $g(6) = 0$

فإن : $12 + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + c = 0$ أي : $12 + \ln 2 + c = 0$

ومنه : $c = -12 - \ln 2$

إذن : $g(x) = 2x + \ln\left(\frac{x-4}{x-5}\right) - 12 - \ln 2$

التمرين 12 :

(1-1) دراسة تغيرات الدالة g :

• مجموعة التعريف : $D_g =]0 ; +\infty[$

• النهايات :

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x - x + 1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x + 1)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1 + \frac{1}{x}) = +\infty$

• المشتق وإشارته : $g'(x) = 1. \ln x + x. \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

ومنه :

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+

ومنه الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[1 ; +\infty[$

ومتناقصة تماماً على المجال $]0 ; 1]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1}$$

ونضع $x-1=z$ فنجد:

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$

المشتق وإشارته:

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{لدينا:}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2} \quad \text{ومنه:}$$

$$f'(x) = \frac{-(x \ln x - x + 1)}{x(x-1)^2} = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$$

ومنه $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

لأن: $x(x-1)^2 > 0$ في المجال $]0; +\infty[$

وعليه:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-

ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$

إذن جدول التغيرات هو:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$	1	0

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	0	$+\infty$

$$g(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 + 1 = 0$$

(2) دراسة إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن: $g(x) = 0$ من أجل $x = 1$.

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; 1[\cup]1; +\infty[$: $g'(x) > 0$.

إذن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

(3) • تعيين النقط المشتركة بين (C) و (C') : $g(x) = \ln x$

ومنه: $x \ln x - x + 1 = \ln x$

وعليه: $(x-1) \ln x - (x-1) = 0$ أي: $(x-1)(\ln x - 1) = 0$

ومنه إما $x-1=0$ أو $\ln x - 1 = 0$

وبالتالي: $x=1$ أو $\ln x = 1$ وعليه: $x=1$ أو $x=e$.

لدينا: $g(1) = 0$ و $g(e) = 1$.

إذن: (C) و (C') تشتركان في النقطتين اللتين فاصلتهما 1 و e .

• لدينا: $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$

معناه: $(x-1) \ln x - (x-1) \leq 0$ ومنه: $(x-1)(\ln x - 1) \leq 0$

x	0	1	e	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	+	-	0	+
$(x-1)(\ln x - 1)$	+	0	-	+

ومنه من أجل $x \in [1; e]$: $(x-1)(\ln x - 1) \leq 0$

أي: $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x \quad \text{دراسة تغيرات } f$$

• النهايات:

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2+x}{2x}$$

ومنه : $h'(x) > 0$ ومنه h متزايدة تماما .

• تبين أن : $h(x) \in I$

لدينا : $3 \leq x \leq 4$ ومنه : $\ln 3 \leq \ln x \leq \ln 4$

وكذلك : $\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq 2$

ومنه : $\ln 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \leq \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq \ln 4 + 2 + \frac{1}{2}$

إذن : $\ln 3 + 2 \leq h(x) \leq \ln 4 + \frac{5}{2}$

وعليه : $3,09 \leq h(x) \leq 3,89$

ومنه : $3 \leq h(x) \leq 4$ أي : $h(x) \in I$

• تبين أن : $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

لدينا : $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ و $3 \leq x \leq 4$ ومنه : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$

وعليه : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

أي : $\frac{3}{4} \leq h'(x) \leq \frac{5}{6}$ إذن : $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

(1) نبرهن أن : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$

الدالة h تقبل الاشتقاق عند كل عدد من $1; +\infty$ وعليه يمكن إجراء تقريب تآلفي للدالة h عند α .

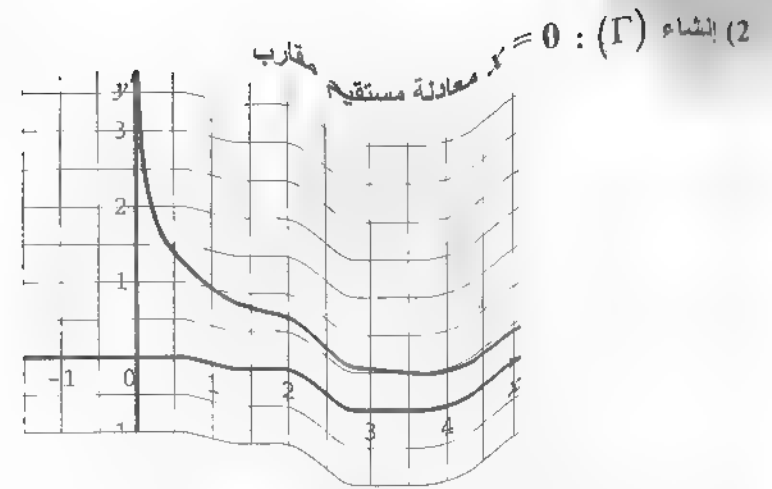
ومنه : $h(x) - h(\alpha) \approx h'(\alpha) \times (x - \alpha)$

وبالتالي : $h(U_n) - h(\alpha) \approx h'(\alpha) (U_n - \alpha)$

أي : $|U_{n+1} - \alpha| \approx |h'(\alpha)| \times |U_n - \alpha|$

لهذا : $|h'(x)| < \frac{5}{6}$ من أجل : $x \in [3; 4]$

وبما أن : $3,5 < \alpha < 3,6$ فإن : $|h'(\alpha)| < \frac{5}{6}$



III-1) تبين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا :

في المجال $[3,5; 3,6]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما ولدينا :

$$f(3,5) = \frac{1}{2,5} \ln 3,5 = 0,501 \dots$$

$$f(3,6) = \frac{1}{2,6} \ln 3,6 = 0,492 \dots$$

ومنه : $\frac{1}{2} < f(3,5)$ وبالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$ و يحقق : $f(\alpha) = \frac{1}{2}$

(2) • تبين أن α حل للمعادلة $h(x) = x$

لدينا : $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ ومنه : $\frac{1}{\alpha - 1} \ln \alpha = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $2 \ln \alpha = \alpha - 1$ أي أن : $2 \ln \alpha - \alpha + 1 = 0$

وعليه : $\ln \alpha - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} = 0$ ومنه : $\ln \alpha - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} + \alpha = \alpha$

أي : $\ln \alpha + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} = \alpha$ وبالتالي : $h(\alpha) = \alpha$

إذن α حلا للمعادلة $h(x) = x$ دراسة اتجاه تغير الدالة $h(x)$

$$\text{إذن : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$$

$$(b) \text{ نبرهن أن : } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{مما سبق : } |U_n - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_{n-1} - \alpha|$$

$$|U_{n-1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_{n-2} - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_1 - \alpha|$$

$$|U_1 - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_0 - \alpha|$$

وبالتالي :

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$\text{ومنه : } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot |U_0 - \alpha|$$

$$\text{لدينا : } |U_0 - \alpha| = |3 - \alpha| \text{ وبما أن : } 3,5 < \alpha < 3,6$$

$$\text{فإن : } |3 - \alpha| < 1 \text{ ومنه : } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(c) نبرهن أن (U_n) متقاربة نحو α :

$$\text{لدينا : } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{ وعليه : } -\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq U_n - \alpha \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{ومنه : } \alpha - \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq U_n \leq \alpha + \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\alpha - \left(\frac{5}{6}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\alpha + \left(\frac{5}{6}\right)^n \right] = \alpha$$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$ إذن : (U_n) متقاربة نحو α .

(4) إذا كانت U_p قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α فإن : $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$

ولدينا : $|U_p - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^p$ ومنه حتى يكون الحصر محقق يجب أن يكون :

$$p \times \ln \left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln 10^{-3} \text{ وعليه : } \ln \left(\frac{5}{6}\right)^p \leq \ln 10^{-3}$$

$$\text{ومنه : } p \geq \frac{-3 \ln 10}{\ln \left(\frac{5}{6}\right)} \text{ ومنه : } p \geq 37,9 \text{ ومنه : } p \geq 38$$

وبالتالي : U_{38} قيمة مقربة إلى 10^{-3} حيث : $U_{38} = 3,513 \times 10^{-3}$.

التمرين 13 :

$$1 - \text{تبين أن : } f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) (x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x \ln x + \ln x + x + 1 - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$\text{إذن : } f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

2 - (a) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا :

لدينا g مستمرة في المجال $]0 ; +\infty[$

$$\text{ولدينا : } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x + x + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + x + 1 = +\infty$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0$$

(c) قابلية الاشتقاق للدالة F عند 0 من اليمين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x + 1} = -\infty$$

إن F غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين .

(a-4) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 1} \times \ln x$$

$$= +\infty$$

(b) دراسة إشارة : $f(x) - \ln x$

$$f(x) - \ln x = \frac{x \ln x}{x + 1} - \ln x = \frac{x \ln x - (x + 1) \ln x}{x + 1}$$

$$f(x) - \ln x = \frac{x \ln x - x \ln x - \ln x}{x + 1} = \frac{-\ln x}{x + 1} \quad \text{إذن :}$$

لدينا : $x + 1 > 0$ ومنه $f(x) - \ln x$ له نفس إشارة : $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	-
$f(x) - \ln x$	+	0	-

(a) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{-x}{x + 1} = 0$$

(Γ) و (C) إنشاء :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{لدينا :}$$

ومنه : $g'(x) > 0$ وعليه g متزايدة تماما و بالتالي المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]0 ; +\infty[$.

(b) تعيين إشارة $g(x)$:

مما سبق نجد :

x	0	β	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول التغيرات لدينا :

x	0	β	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[\beta ; +\infty[$

و f متناقصة تماما على المجال $]0 ; \beta]$.

(c) تبين أن : $f(\beta) = -\beta$

$$\text{لدينا : } g(\beta) = 0 \text{ و } f(\beta) = \frac{\beta \ln \beta}{\beta + 1}$$

$$\text{ومنه : } \ln \beta + \beta + 1 = 0 \quad \text{وبالتالي : } \ln \beta = -(\beta + 1)$$

$$\text{إذن : } f(\beta) = \frac{-\beta(\beta + 1)}{\beta + 1} \quad \text{وعليه : } f(\beta) = -\beta$$

(a-3) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x + 1} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

(b) قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 :

الدالة f غير معرفة عند 0 وعليه غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2} \quad \text{إذن :}$$

بما أن : $x > 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.
جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

(2) استنتاج إشارة $f(x)$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن : $f(x) > 0$.

(1-11) حساب $g'(x)$ واستنتاج تغيرات الدالة g :

$$g'(x) = 1 \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + \frac{-1}{x(x+1)} \times x$$

$$g'(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) + \frac{-1}{x+1}$$

$$g'(x) = f(x) \quad \text{ولهذا :}$$

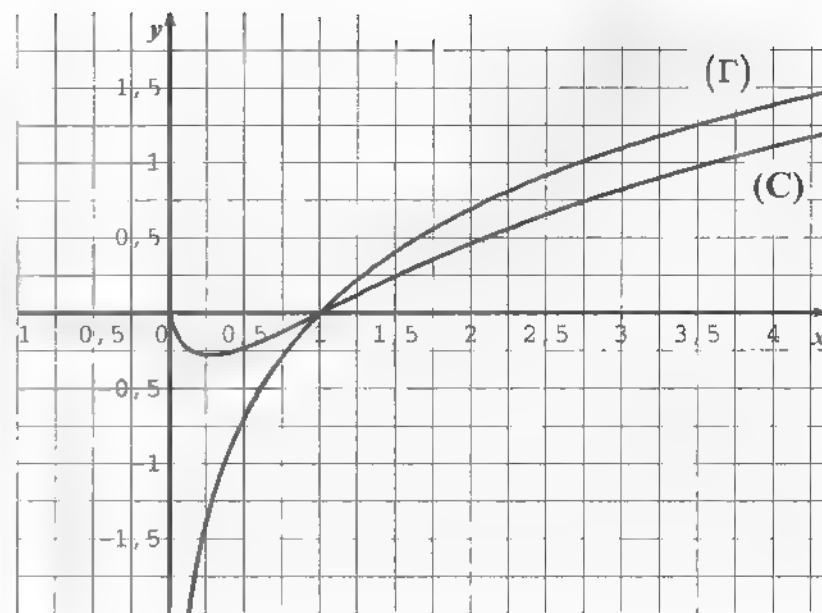
بما أن $g'(x) > 0$ وبالتالي g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

$$(hok)(x) = h[k(x)] = h\left[\frac{1}{x}\right] \quad \text{الدينا :}$$

$$(hok)(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \text{ومنه :}$$

$$g(x) = (hok)(x) \quad \text{ولهذا :} \quad g = hok$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x+1) - x \ln x = 0$$



التمرين 14 :

1-1 دراسة تغيرات الدالة f :

- مجموعة التعريف : $D =]0; +\infty[$
- النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = 0$$

- المشتق وإشارته :

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x - 1(x+1)}{x^2} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-8 \ln x + x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{-8 \ln x}{x} + x + \frac{4}{x} \right) = +\infty$$

$$\bullet g'(x) = \frac{-8}{x} + 2x = \frac{-8 + 2x^2}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$$

$x = 2$: معناه $g'(x) = 0$

من أجل $x > 2$ الدالة g متزايدة تماما لأن $g'(x) > 0$.

من أجل $0 < x < 2$ الدالة g متناقصة تماما لأن $g'(x) < 0$.

• جدول التغيرات :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(2)$	$+\infty$

(2) إشارة $g(x)$:

لدينا : $g(2) = -8 \ln 2 + 8$ لكن : $\ln 2 < 1$

ومنه : $-8 \ln 2 + 8 > 0$ إذن : $g(2) > 0$

وعليه حسب جدول التغيرات $g(x) > 0$.

(1) تبين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2x(x^2 + 4)}{x^4} \times \ln x + \frac{x^2 + 4}{x^2} \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{x^3} \ln x + \frac{x^2 + 4}{x^3} = \frac{-8 \ln x + x^2 + 4}{x^3}$$

و بالتالي : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x^2} \times \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2} \times \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

و ذلك بوضع : $u = \frac{1}{x}$

• جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	1

(1-III) حساب $\ln(U_n)$:

$$\ln(U_n) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = g(n)$$

(2) نبين أن (U_n) متزايدة تماما.

$$\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) = g(n+1) - g(n)$$

ولدينا : $g(n+1) > g(n)$ لأن الدالة g متزايدة تماما.

وعليه : $\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n) > 0$

إذن : $\ln(U_{n+1}) > \ln(U_n)$ ومنه : $U_{n+1} > U_n$

لأن الدالة \ln متزايدة تماما. إذن (U_n) متزايدة تماما.

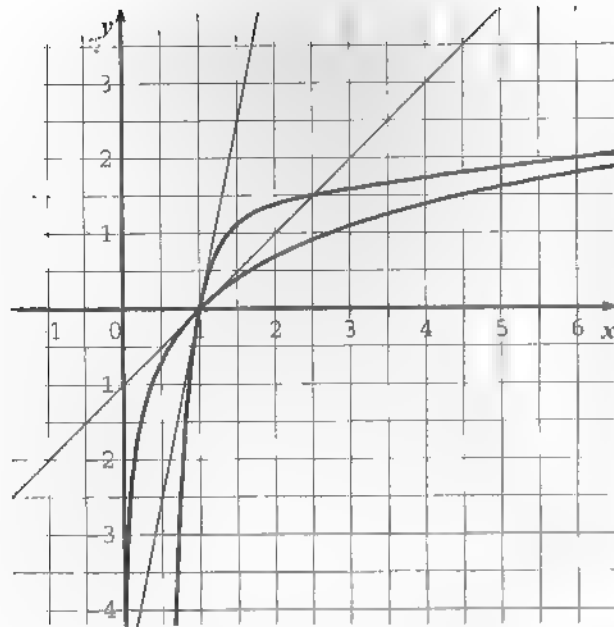
$$(3) \text{ نبين أن } (U_n) \text{ متقاربة : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 1$$

إذن : (U_n) متقاربة نحو e .

التمرين 15 :

(1-I) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-8 \ln x + x^2 + 4) = +\infty$$



التمرين 16 :

1) مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\}$

إن : $D_f =]-2 : +\infty[$

2) دراسة استمرارية f عند 0 :

لدينا : $f(0) = 3 - \ln 2$

$$\begin{cases} f(x) = x + 3 + \ln \frac{x+1}{x+2} ; x \geq 0 \\ f(x) = x + 3 + \ln \frac{-x+1}{x+2} ; x \leq 0 \end{cases}$$

ولدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 3 + \ln \frac{x+1}{x+2} = 3 - \ln 2 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 3 + \ln \frac{-x+1}{x+2} = 3 - \ln 2 = f(0)$$

ومنه f مستمرة عند 0

لهابلية الاشتقاق عند 0 :

إشارة المشتق : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

لدينا : $x^3 > 0$ و $g(x) > 0$ ومنه : $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $]0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1-II) دراسة إشارة : $h(x)$

$$h(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2} \times \ln x - \ln x$$

$$h(x) = \frac{(x^2 + 4) \ln x - x^2 \ln x}{x^2} = \frac{4 \ln x}{x^2} ; \text{ ومنه :}$$

$h(x) = 0$ تكافئ $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$

$h(x) > 0$ تكافئ $\ln x > 0$ ومنه $x > 1$

$h(x) < 0$ تكافئ $\ln x < 0$ ومنه $0 < x < 1$.

2) الوضعية النسبية للمنحنى (C) و (γ) :

في المجال $]1 ; +\infty[$: (C) يقع فوق (γ) .

في المجال $]0 ; 1[$: (C) يقع تحت (γ) .

(C) يقطع (γ) في النقطة $A(1 ; 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \times \frac{\ln x}{x^2} = 0 ; \text{ لدينا :}$$

نستنتج أن (C) و (γ) متقاربان عندما يقترب x من $+\infty$

4) إنشاء (C) و (γ) :

معادلة المماس لـ (C) عند $A(1 ; 0)$ هي : $y = 5(x - 1)$.

معادلة المماس لـ (γ) عند $A(1 ; 0)$ هي : $y = (x - 1)$.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{\ln(1-x)}{-x} - \frac{1}{2} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{-1}{2}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0.
(3) دراسة تغيرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x + 3 + \ln \frac{|x| + 1}{x + 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 + \ln \frac{x + 1}{x + 2} = +\infty$$

من أجل $x > 0$ لدينا :

$$f'(x) = 1 + \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = 1 + \frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+2)(x+1)} \quad \text{وعليه :}$$

وبالتالي لما $x > 0$ فإن $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

من أجل $x < 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{-1(x+2) - 1(-x+1)}{(x+2)^2} = 1 + \frac{-3}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{-x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x+2)(-x+1)} = \frac{(x+2)(-x+1) - 3}{(x+2)(-x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + x - 2x + 2 - 3}{(x+2)(-x+1)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3 + \ln \frac{x+1}{x+2} - 3 + \ln 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln 2 + \ln(x+1) - \ln(x+2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(\frac{2}{x+2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x} \ln \frac{2}{2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) \quad \text{ومنه :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1}{2} \times \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right)}{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3 + \ln \frac{-x+1}{x+2} - 3 + \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln \left(\frac{-x+1}{x+2} \right) + \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1-x) - \ln(x+2) + \ln 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{\ln(1-x)}{-x} + \frac{1}{x} \ln \frac{2}{x+2}$$

التمرين 17 :
حل المعادلات :

(1) لدينا : $\text{Log}(x^2 - 1) = \text{Log} x$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $x^2 - 1 > 0$ وعليه : $x > 0$ و $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ إذن : $D =]1; +\infty[$.

المعادلة تكافئ : $x^2 - 1 = x$ أي : $x^2 - x - 1 = 0$.

لدينا : $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$ وعليه :

إذن للمعادلة حلين : $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (مرفوض)

إذن مجموعة الحلول : $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

(2) لدينا : $\text{Log} x + \text{Log}(-x + 5) = \text{Log} 4$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $-x + 5 > 0$ أي : $x > 0$ و $x < 5$ ومنه : $D =]0; 5[$.

المعادلة تكافئ : $\text{Log} x + \text{Log}(-x + 5) = \text{Log} 4$

أي أن : $x(-x + 5) = 4$ ومنه : $-x^2 + 5x - 4 = 0$

لدينا : $\Delta = (5)^2 - 4(-4)(-1) = -11$ ومنه :

إذن ليس للمعادلة حلول.

(3) لدينا : $\text{Log} x - \text{Log}(x - 1) = 1$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x > 0$ و $x - 1 > 0$

إذن : $D =]1; +\infty[$

المعادلة تكافئ : $\text{Log} \frac{x}{x-1} = \text{Log} 10$ ومنه : $\frac{x}{x-1} = 10$

وبالتالي : $x = 10(x - 1)$ وعليه : $9x = 10$ ومنه : $x = \frac{10}{9}$

إذن مجموعة الحلول : $S = \left\{ \frac{10}{9} \right\}$.

التمرين 18 :

- دراسة تغيرات الدوال :

لدينا : $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln|x|$ ومنه : $f(x) = \text{Log}|x|$

افن : $f'(x) = -\frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)^2 (-x + 1)}$

لدينا : $x^2 + x + 1 > 0$ و $-x + 1 > 0$ و $-x + 2 > 0$ ومنه : $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-2; 0]$.

x	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$	+
$f(x)$	$+\infty$	$3 - \ln 2$	$+\infty$

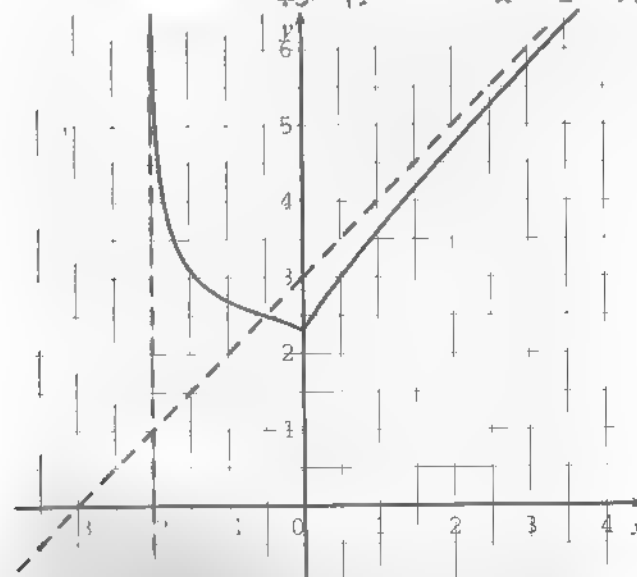
(4) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 3 + \ln \frac{x+1}{x+2} - x - 3 \right)$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = 0$

نستنتج أن $y = x + 3$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

(5) التمثيل البياني : $x = -2$ معادلة مستقيم مقارب



$$g(x) = \frac{1 - \frac{1}{\ln 10} \times \ln x}{x} \quad \text{أي} \quad g(x) = \frac{1 - \text{Log} x}{x} \quad : \text{لدينا (2)}$$

$$g(x) = \frac{\ln 10 - \ln x}{x \ln 10} \quad : \text{ومنه}$$

$$\bullet D_g =]0 ; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 10 - \ln x}{x \ln 10} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln 10} (\ln 10 - \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 10 - \ln x}{x \ln 10} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\ln 10} \right] = 0$$

$$\bullet g'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (\ln 10 - \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1 - \ln 10 + \ln x}{x^2 \ln 10}$$

$$= \frac{\ln x - \ln 10 - 1}{x^2 \ln 10}$$

$$g'(x) = \frac{\ln \left(\frac{x}{10} \right) - 1}{x^2 \ln 10} \quad : \text{ومنه}$$

$$\text{دراسة إشارة المشتق : } g'(x) = 0 \text{ تكافئ : } \ln \left(\frac{x}{10} \right) - 1 = 0$$

$$\text{وعليه : } \ln \left(\frac{x}{10} \right) = 1 \text{ وبالتالي : } \frac{x}{10} = e \quad \text{إذن : } x = 10e$$

$$g'(x) > 0 \text{ تكافئ } \ln \left(\frac{x}{10} \right) - 1 > 0 \text{ وعليه : } x > 10e$$

$$g'(x) < 0 \text{ تكافئ } x < 10e$$

$$\bullet D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln 10} \times \ln |x| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln 10} \times \ln |x| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln 10} \times \ln |x| = -\infty$$

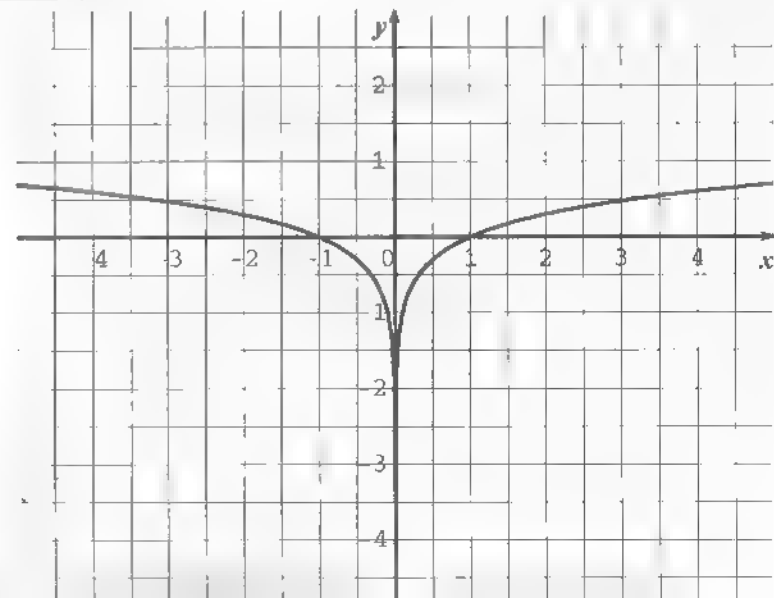
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 10} \times \ln |x| = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$$

لما $x > 0 : f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماماً على المجال $]0 ; +\infty[$

لما $x < 0 : f'(x) < 0$ وبالتالي f متناقصة تماماً على المجال $] -\infty ; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$



$$\bullet h'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 10} \quad \text{ومنه :}$$

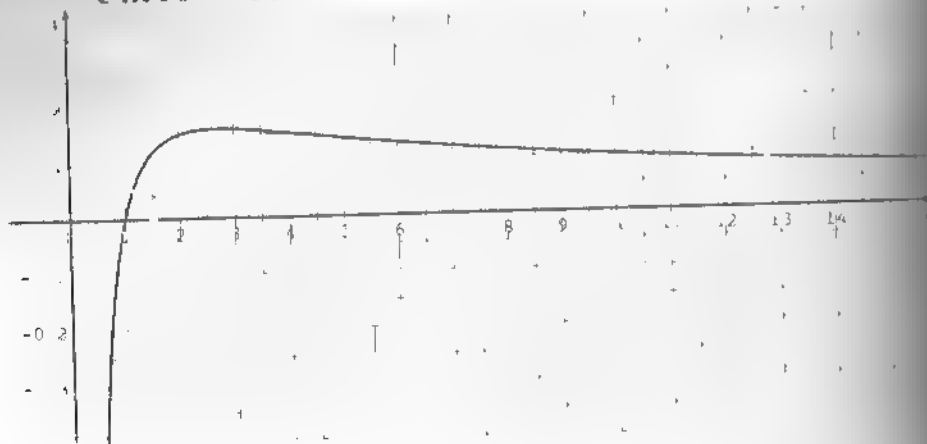
$$x = e \quad h'(x) = 0 \quad \text{تكافئ : } 1 - \ln x = 0 \quad \text{ومنه}$$

$$x < e \quad h'(x) > 0 \quad \text{تكافئ : } 1 - \ln x > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$x > e \quad h'(x) < 0 \quad \text{تكافئ : } 1 - \ln x < 0 \quad \text{ومنه}$$

x	0	e	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
$h(x)$	$-\infty$	$h(e)$	0

$$h(e) = \frac{\ln e}{e \ln 10} = \frac{1}{e \ln 10} \approx 0,16$$



من 19 :
نسمي تغيرات الدالة f :

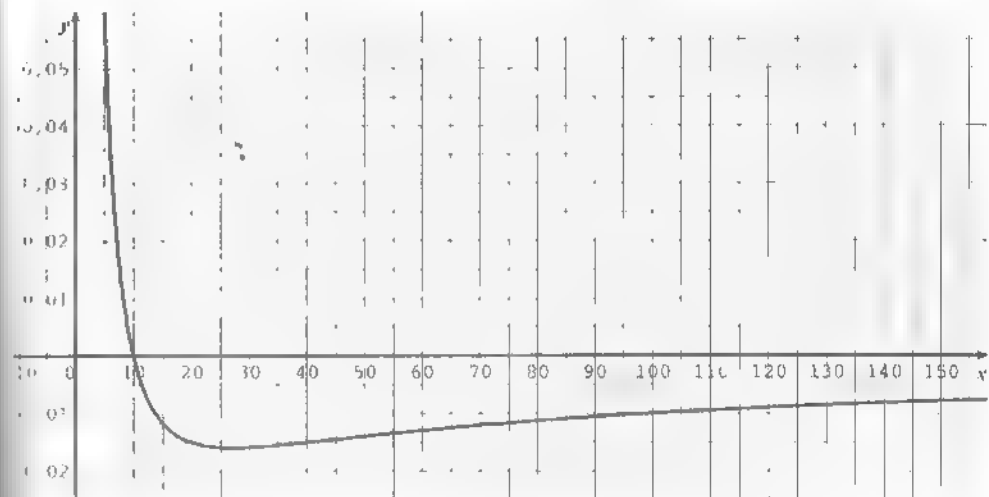
$$f(x) = \frac{1}{(\ln 10)^2} \times (\ln x)^2 \quad \text{أي : } f(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln 10} \right)^2 \quad \text{نسمي :}$$

$$\bullet D_f =]0 ; +\infty[$$

x	0	$10e$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$g(10e)$	0

$$g(10e) = \frac{\ln 10 - \ln 10e}{10e \cdot \ln 10} = \frac{\ln 10 - \ln 10 - \ln e}{10e \ln 10} = \frac{-1}{10e \ln 10}$$

نمثل البيان في معلم غير متجانس لتوضيح الرسم لأن $g(10e) \approx -0,015$



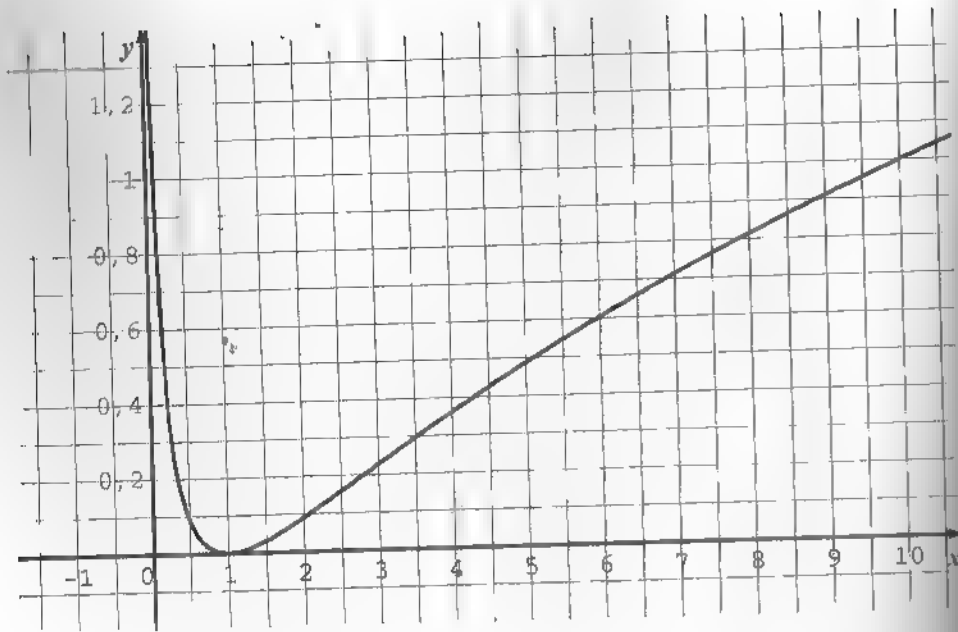
$$\bullet h(x) = \frac{\text{Log} x}{x} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{\ln x}{x} \quad \text{لدينا : (3)}$$

$$h(x) = \frac{\ln x}{x \ln 10} \quad \text{ومنه :}$$

$$\bullet D_h =]0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x \ln 10} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 10} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$



التمرين 20 :

لدينا : $f(x) = \text{Log}(x-4)(1-x)$

ومنه : $f(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \ln(x-4)(1-x)$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x-4)(1-x) > 0\}$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$(x-4)(1-x)$	-	0	+	0	-

اذن : $D_f =]1; 4[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln 10} \ln(x-4)(1-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\ln 10} \ln(x-4)(1-x) = -\infty$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{-2x+5}{(x-4)(1-x)}$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ ومنه } -2x+5=0 \text{ تكافئ } f'(x)=0$$

$$x < \frac{5}{2} \text{ ومنه } -2x+5 > 0 \text{ تكافئ } f'(x) > 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{(\ln 10)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{(\ln 10)^2} = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = \frac{1}{(\ln 10)^2} \times 2 \times \frac{1}{x} \ln x$$

ومنه : $f'(x) = 0$ تكافئ $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$

$f'(x) > 0$ تكافئ $\ln x > 0$ ومنه $x > 1$

اذن f متزايدة تماما على مجال $]1; +\infty[$

$f'(x) < 0$ تكافئ $0 < x < 1$ وعليه f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$

$$f(1) = \frac{1}{(\ln 10)^2} \times (\ln 1)^2 = 0$$

لدينا معادلة المستقيم المقارب $x = 0$ وبما ان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln 10)^2} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln 10)^2} \times \frac{(2 \ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(\ln 10)^2} \times \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$$

ومنه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل عند $+\infty$

7- الدالة الأسية ذات الأساس a

تعريف :

A عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

الدالة : $a^x \mapsto x$ حيث x عدد حقيقي تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a ولدينا :

$$a^x = e^{x \ln a}$$

مثال : لتكن الدالة $f: x \mapsto 3^x$ أو $x \mapsto e^{x \ln 3}$ وهي الدالة الأسية ذات الأساس 3 .

دراسة التغيرات :

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

$$D_f =]-\infty ; +\infty[$$

من أجل $a > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

$$f'(x) = (Lna) \cdot e^{x \ln a}$$

وعليه $f'(x) > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

من أجل $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$f'(x) = (Lna) e^{x \ln a}$$

وعليه $f'(x) < 0$ لأن $\ln a < 0$ وبالتالي f متناقصة تماما على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

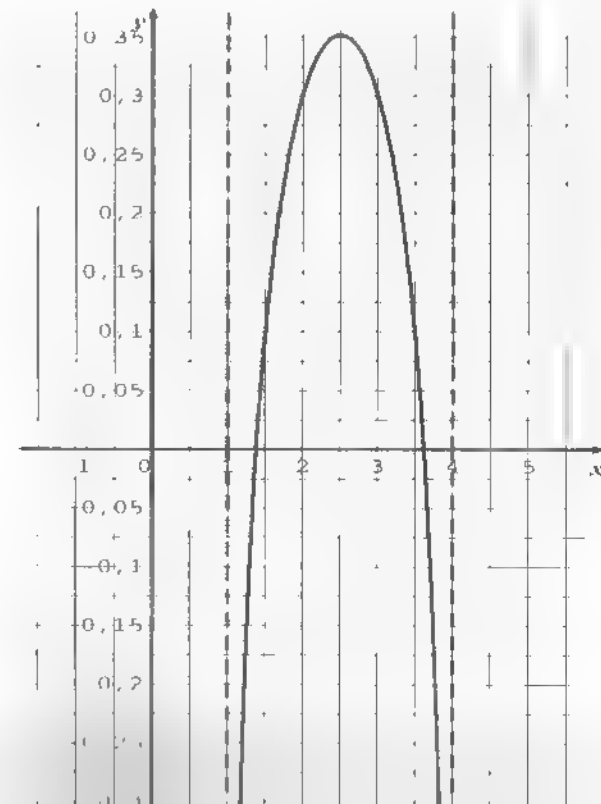
$$f'(x) < 0 \text{ تكافئ } -2x + 5 < 0 \text{ ومنه } x > \frac{5}{2}$$

x	1	5	4
		2	
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$-\infty \nearrow f\left(\frac{5}{2}\right) \searrow -\infty$		

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10} \times \ln \left(\frac{5}{2} - 4\right) \left(1 - \frac{5}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10} \times \ln \left(\frac{-3}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{9}{4} \approx 0,35$$

معادلات المستقيمات المقاربة $x = 1$, $x = 4$



خواص :

a و a' عدنان حقيقيان موجبان تماما و يختلف كل منهما عن 1 .

x و x' عدنان حقيقيان :

$$1) \ln a^x = x \cdot \ln a$$

$$2) a^{x+x'} = a^x \cdot a^{x'}$$

$$3) a^{x-x'} = \frac{a^x}{a^{x'}}$$

$$4) (a^x)^{x'} = a^{x \cdot x'}$$

$$5) (a \cdot a')^x = a^x \cdot a'^x$$

$$6) \left(\frac{a}{a'} \right)^x = \frac{a^x}{a'^x}$$

حالة خاصة :

من أجل : $a = 10$ الدالة : $x \mapsto 10^x$

تسمى الدالة الأسية ذات الأساس 10.

التمارين

التمرين 1 :

حل في \mathbb{R} المعادلات الآتية :

$$1) 10^x = 5 \quad ; \quad 2) 3^x = 5^{2x-5} \quad ; \quad 3) 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0$$

$$4) 3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$$

التمرين 2 :

$$\begin{cases} 4^x = y^4 \\ 4^{x+1} = y^{4+x} \end{cases} \quad \text{حل في } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ الجملة :}$$

التمرين 3 :

عين مشتقات الدوال الآتية :

$$1) f: x \mapsto 10^{2x-3}$$

$$2) f: x \mapsto 4^{x^2-4x}$$

$$3) f: x \mapsto \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}x^2-5}$$

$$4) f: x \mapsto (x^2 - 4) 2^x$$

التمرين 4 :

أدرس تغيرات الدوال الآتية ثم مثلها بيانيا.

$$1) f: x \mapsto 2^{x^2+x+1} \quad 2) g: x \mapsto (0, 4)^{x-1}$$

$$3) h: x \mapsto x^x$$

التمرين 5 :

أدرس تغيرات الدالتين كل من الدالتين f و g المعرفتين فيما يلي ثم مثلهما بيانيا.

$$f: x \mapsto -2 \cdot 4^x + 2 \quad ; \quad g: x \mapsto 2 \cdot 4^x + 1$$

عين نقط تقاطع (C_g) و (C_f) .

التمرين 6 :

f و g دالتان معرفتان كما يلي :

$$f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{2} \quad ; \quad g(x) = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$$

1- عين مجموعة تعريف كل منهما .

$$2- \text{احسب : } [g(x)]^2 - [f(x)]^2$$

3- ادرس تغيرات الدالة f .

$$4- \text{احسب : } f(1), f(0), f(-1), f(-2), f(2)$$

التمرين 7 :

$$f \text{ دالة معرفة بالعلاقة : } f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها.

2- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات التعريف .

3- اعتبر الدالة g المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & ; \quad x \neq 1 \\ g(1) = e \end{cases}$$

• أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$

باستعمال الآلة البيانية .

التمرين 8 :

ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

التمرين 9 :

$$f \text{ دالة معرفة بالعلاقة : } f(x) = \frac{10^x}{10^x - 1}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

(3) احسب $f'(x)$ وادرس إشارته.

4- أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

التمرين 10 :

(1) ادرس تغيرات الدالة g حيث : $g(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ و استنتج إشارتها .

(2) f دالة عددية لمتغير حقيقي موجب تماما x معرفة كما يلي : $f(x) = x^{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f .

ثم استنتج تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

التمرين 1 :

حل المعادلات :

(1) لدينا : $10^x = 5$ وهي تكافئ : $\ln 10^x = \ln 5$

ومنه $x \ln 10 = \ln 5$ وبالتالي : $x = \frac{\ln 5}{\ln 10}$

مجموعة الحلول : $S = \left\{ \frac{\ln 5}{\ln 10} \right\}$.

(2) لدينا : $3^x = 5^{2x-5}$ وهي تكافئ : $\ln 3^x = \ln 5^{2x-5}$

وعليه : $x \ln 3 = (2x - 5) \ln 5$ وعليه : $x \ln 3 = 2x \ln 5 - 5 \ln 5$

وعليه : $x \ln 3 - 2x \ln 5 = -5 \ln 5$

إذن : $x (\ln 3 - 2 \ln 5) = -5 \ln 5$ أي $x = \frac{-5 \ln 5}{\ln 3 - \ln 5^2}$

ومنه : $x = \frac{-5 \ln 5}{\ln \left(\frac{3}{25} \right)}$

(1) لدينا : $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0$

بوضع $5^x = y$ نجد : $y^2 - 7y + 12 = 0$ ومنه : $\Delta = 1$

إذن للمعادلة حلين $y_1 = 3$ و $y_2 = 4$

لما $y = 3$: $5^x = 3$ وعليه $\ln 5^x = \ln 3$

إذن : $x \ln 5 = \ln 3$ ومنه : $x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$

لما $y = 4$: $5^x = 4$ وعليه : $\ln 5^x = \ln 4$

ومنه : $x \ln 5 = \ln 4$ وبالتالي : $x = \frac{\ln 4}{\ln 5}$

مجموعة الحلول : $S = \left\{ \frac{\ln 3}{\ln 5} ; \frac{\ln 4}{\ln 5} \right\}$

(1) لدينا : $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$ ومنه : $9 \cdot 3^x + (3^2)^x \cdot (3^2)^{-1} = 1458$

أي : $9 \cdot 3^x + 3^{-2} \cdot (3^2)^x - 1458 = 0$

• أنشئ التمثيل البياني (C_g) للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$

باستعمال الآلة البيانية.

التمرين 8 :

ادرس تغيرات الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

التمرين 9 :

$$f(x) = \frac{10^x}{10^x - 1} \quad \text{ف دالة معرفة بالعبارة :}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف

(3) احسب $f'(x)$ وأدرس إشارته.

4- أنشئ (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

التمرين 10 :

(1) ادرس تغيرات الدالة g حيث : $g(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ واستنتج إشارتها.

(2) f دالة عددية لمتغير حقيقي موجب تماماً x معرفة كما يلي : $f(x) = x^{x-1}$

- ادرس تغيرات الدالة f .

ثم استنتج تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

التمرين 1 :

حل المعادلات :

$$(1) \text{ لدينا : } 10^x = 5 \text{ وهي تكافئ : } \ln 10^x = \ln 5$$

$$\text{ومنه } x \ln 10 = \ln 5 \text{ وبالتالي : } x = \frac{\ln 5}{\ln 10}$$

$$\text{مجموعة الحلول : } S = \left\{ \frac{\ln 5}{\ln 10} \right\}$$

$$(2) \text{ لدينا : } 3^x = 5^{2x-5} \text{ وهي تكافئ : } \ln 3^x = \ln 5^{2x-5}$$

$$\text{وعليه : } x \ln 3 = (2x - 5) \ln 5 \text{ وعليه : } x \ln 3 = 2x \ln 5 - 5 \ln 5$$

$$\text{وعليه : } x \ln 3 - 2x \ln 5 = -5 \ln 5$$

$$\text{إذن : } x (\ln 3 - 2 \ln 5) = -5 \ln 5 \text{ أي } x = \frac{-5 \ln 5}{\ln 3 - \ln 5^2}$$

$$\text{ومنه : } x = \frac{-5 \ln 5}{\ln \left(\frac{3}{25} \right)}$$

$$(1) \text{ لدينا : } 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0$$

$$\text{بوضع } y = 5^x \text{ نجد : } y^2 - 7y + 12 = 0 \text{ ومنه : } \Delta = 1$$

$$\text{إذن للمعادلة حلين } y_1 = 3 \text{ و } y_2 = 4$$

$$\text{لما } y = 3 : 5^x = 3 \text{ وعليه } \ln 5^x = \ln 3$$

$$\text{إذن : } x \ln 5 = \ln 3 \text{ ومنه : } x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$$

$$\text{لما } y = 4 : 5^x = 4 \text{ وعليه : } \ln 5^x = \ln 4$$

$$\text{ومنه : } x \ln 5 = \ln 4 \text{ وبالتالي : } x = \frac{\ln 4}{\ln 5}$$

$$\text{مجموعة الحلول : } S = \left\{ \frac{\ln 3}{\ln 5} ; \frac{\ln 4}{\ln 5} \right\}$$

$$(1) \text{ لدينا : } 3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458 \text{ ومنه : } 9 \cdot 3^x + (3^2)^x \cdot (3^2)^{-1} = 1458$$

$$\text{أي : } 9 \cdot 3^x + 3^{-2} \cdot (3^2)^x - 1458 = 0$$

مجموعة الحلول : $S = \{(2, \ln 2) ; (-2, -\ln 2)\}$

التمرين 3 :

تعيين المشتقات :

(1) لدينا : $f(x) = 10^{2x-3} = e^{(2x-3)\ln 10}$ ومنه :

$$f'(x) = (2\ln 10) e^{(2x-3)\ln 10} = (2\ln 10) 10^{2x-3}$$

(2) لدينا : $f(x) = 4^{x^2-4x}$ أي : $f(x) = e^{(x^2-4x)\ln 4}$

$$f'(x) = (2x - 4) \ln 4 \times e^{(x^2-4x)\ln 4}$$

$$f'(x) = 4(x - 2) \ln 2 \times 4^{x^2-4x}$$

(3) لدينا : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x^2-5}$

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)\ln \frac{1}{2}} = e^{-\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)\ln 2}$$

$$f'(x) = -(x \ln 2) e^{-\left(\frac{1}{2}x^2-5\right)\ln 2}$$

$$f'(x) = -(x \ln 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x^2-5}$$

(4) لدينا : $f(x) = (x^2 - 4)2^x$ أي : $f(x) = (x^2 - 4)e^{x\ln 2}$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{x\ln 2} + (x^2 - 4) \ln 2 \times e^{x\ln 2}$$

$$= e^{x\ln 2} [2x + (x^2 - 4) \ln 2]$$

$$f'(x) = [(x^2 - 4) \ln 2 + 2x] \times 2^x$$

التمرين 4 :

(1) لدينا : $f(x) = 2^{x^2+x+1}$ ومنه : $f(x) = e^{(x^2+x+1)\ln 2}$

$$\bullet D_f = \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x^2+x+1)\ln 2} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x^2+x+1)\ln 2} = +\infty$$

$$\bullet f'(x) = (2x+1)\ln 2 \cdot e^{(x^2+x+1)\ln 2}$$

$$\text{ومنه : } \frac{1}{9} \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 3^x - 1458 = 0$$

$$\text{وبالتالي : } 3^{2x} + 81 \cdot 3^x - 13122 = 0$$

$$\text{بوضع } 3^x = y \text{ نجد : } y^2 + 81y - 13122 = 0$$

$$\text{لدينا : } \Delta = 59049 \text{ ومنه للمعادلة حلين :}$$

$$y_2 = \frac{-81 - 243}{2} = -162 \quad ; \quad y_1 = \frac{-81 + 243}{2} = 81$$

$$\text{وعليه : } 3^x = 81 \text{ وبالتالي : } \ln 3^x = \ln 81$$

$$\text{ومنه : } x \ln 3 = \ln 3^4 \text{ أي : } x = \frac{4\ln 3}{\ln 3} \text{ وعليه : } x = 4$$

$$\text{مجموعة الحلول : } S = \{4\}$$

التمرين 2 :

$$\text{حل الجملة : } \begin{cases} 4^x = y^4 \\ 4^{x+1} = y^{4+x} \end{cases} \text{ وهي تكافئ :}$$

$$\begin{cases} x \ln 4 = 4 \ln y \\ (x+1) \ln 4 = (4+x) \ln y \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} \ln 4^x = \ln y^4 \\ \ln 4^{x+1} = \ln y^{4+x} \end{cases}$$

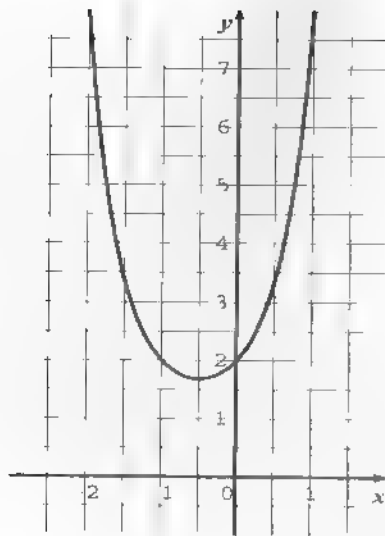
$$\begin{cases} \ln y = \frac{x \ln 4}{4} \\ (x+1) \ln 4 = (x+4) \times \frac{x \ln 4}{4} \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\begin{cases} \ln y = \frac{x \ln 4}{4} \\ 4(x+1) = x(x+4) \end{cases} \text{ وعليه :}$$

$$\begin{cases} x = 2 \text{ أو } x = -2 \\ \ln y = \frac{x \ln 4}{4} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} \ln y = \frac{x \ln 4}{4} \\ x^2 = 4 \end{cases} \text{ وبالتالي :}$$

$$\text{لما } x = 2 : y = \frac{1}{2} \ln 4 \text{ أي : } y = \ln 2$$

$$\text{لما } x = -2 : y = -\frac{1}{2} \ln 4 \text{ أي : } y = -\ln 2$$



$$g(x) = \left(\frac{4}{10}\right)^{x-1} \quad \text{أي} \quad g(x) = (0,4)^{x-1} \quad (2)$$

$$g(x) = e^{(x-1)\ln \frac{2}{5}} \quad \text{وعليه} \quad g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$$

$$\bullet D = \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x-1)\ln \frac{2}{5}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-1)\ln \frac{2}{5}} = 0$$

$$\bullet g'(x) = \ln \frac{2}{5} \times e^{(x-1)\ln \frac{2}{5}}$$

وعليه : $g'(x) < 0$ و g متناقصة تماماً على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	0

الدراسة اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

لدينا $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب عند $-\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$
ومتناقصة تماماً على المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{3}{4}}$$

دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^2+x+1)\ln 2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^2+x+1)\ln 2}}{(x^2+x+1)\ln 2} \times \frac{(x^2+x+1)\ln 2}{x} = +\infty \end{aligned}$$

وعليه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{(x^2+x+1)\ln 2}}{(x^2+x+1)\ln 2} \times \frac{(x^2+x+1)\ln 2}{x} = -\infty$$

وعليه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $-\infty$.

جدول التغيرات :

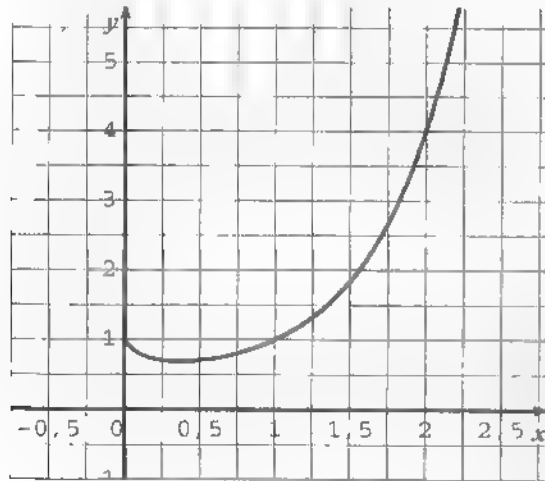
x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$	-		+
$h(x)$	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$

$$h\left(\frac{1}{e}\right) = e^{e \cdot \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = e^{e \cdot \frac{1}{e} \cdot (-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln x}}{x \ln x} \times \ln x = +\infty$$

الآن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب.



الممرين 5 :

$$f(x) = -2 \cdot 4^x + 2 \quad \text{لدراسة تغيرات } f$$

$$f(x) = -2 e^{x \ln 4} + 2 \quad \text{نطلبه :}$$

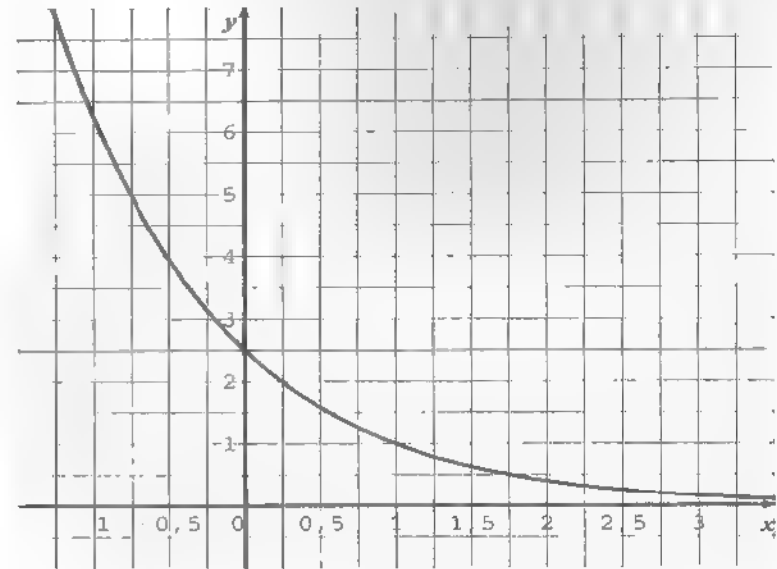
$$\bullet D_f =]-\infty ; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-2e^{x \ln 4} + 2] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2e^{x \ln 4} + 2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{(x-1)\ln^2 5}{5}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{(x-1)\ln^2 5}{5}}}{(x-1)\ln^2 \frac{5}{5}} \times \frac{(x-1)\ln^2 5}{x} = -\infty$$

وعليه البيان يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $-\infty$.



(3) لدينا : $h(x) = x^x$ أي : $h(x) = e^{x \ln x}$

$$\bullet D =]0 ; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = +\infty$$

$$\bullet h'(x) = \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) e^{x \ln x}$$

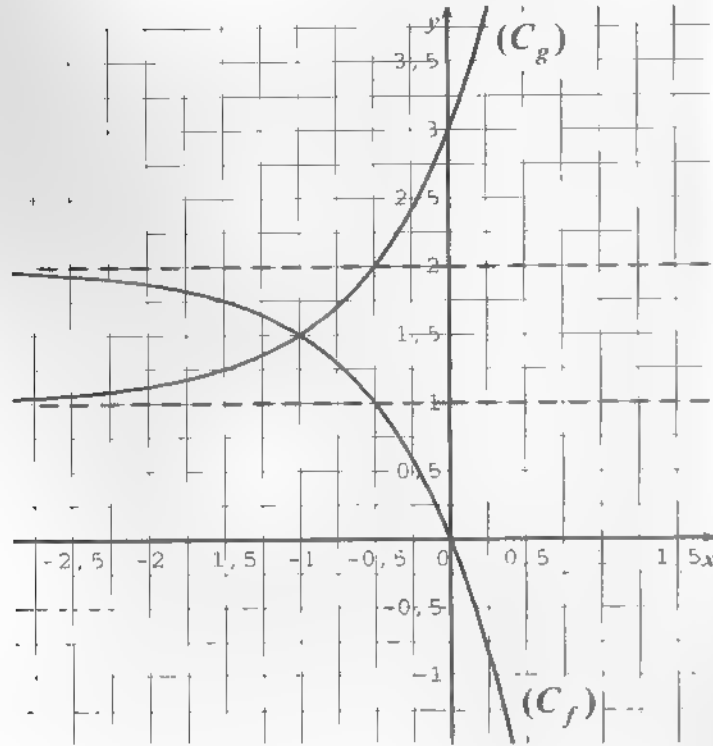
$$h'(x) = (1 + \ln x) e^{x \ln x} \quad \text{إن :}$$

$$h'(x) = 0 \quad \text{تكافئ : } 1 + \ln x = 0 \quad \text{ومنه : } \ln x = -1 \quad \text{وعليه : } x = \frac{1}{e}$$

$$h'(x) > 0 \quad \text{تكافئ : } 1 + \ln x > 0 \quad \text{ومنه : } \ln x > -1$$

$$\text{وبالتالي : } x > \frac{1}{e}$$

وعليه (C_g) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $-\infty$



تعيين نقط تقاطع (C_f) و (C_g) :

لدينا: $f(x) = g(x)$ ومنه: $-2e^{x \ln 4} + 2 = 2e^{x \ln 4} + 1$

ومنه: $4e^{x \ln 4} = 1$ أي: $e^{x \ln 4} = \frac{1}{4}$ ومنه: $\ln e^{x \ln 4} = \ln \frac{1}{4}$

اذن: $x \ln 4 = -\ln 4$ وعليه: $x = -1$

حيث: $f(-1) = g(-1) = 2e^{-\ln 4} + 1 = 2e^{\ln \frac{1}{4}} + 1 = \frac{2}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

اذن: $(C_f) \cap (C_g) = \left\{ A \left(-1 ; \frac{3}{4} \right) \right\}$

تمرين 6:

$D_f = \mathbb{R} ; D_g = \mathbb{R}$ (1)

(2) لدينا: $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{10^x + 10^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{10^x - 10^{-x}}{2} \right)^2$

• $f'(x) = -2 \ln 4 \cdot e^{x \ln 4}$

ومنه: $f'(x) < 0$ وعليه f متناقصة تماما على \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	2	$+\infty$

دراسة تغيرات g حيث: $g(x) = 2 \cdot 4^x + 1$

وعليه: $g(x) = 2 \cdot e^{x \ln 4} + 1$

• $D_f =]-\infty ; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x \ln 4} + 1 = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{x \ln 4} + 1 = +\infty$

• $g'(x) = 2 \ln 4 \cdot e^{x \ln 4}$

وعليه $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما على \mathbb{R}

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	1	$+\infty$

دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة $y = 2$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

. $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب للمنحنى (C_g) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2e^{x \ln 4} + 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2e^{x \ln 4}}{x \ln 4} \times \ln 4 + \frac{2}{x} = -\infty \end{aligned}$$

وعليه (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x \ln 4}}{x \ln 4} \times \ln 4 + \frac{1}{x} = +\infty$$

لدينا : $f(x) = e^{\frac{1}{x-1} \ln|x|}$ ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{0; 1\}$

الدالة f هي جداء و مركب لوال ناطقة و لوغاريتمية و أسية مستمرة و عليه فهي مستمرة على كل من المجالات $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.
(2) احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x-1} \ln|x|} = +\infty$$

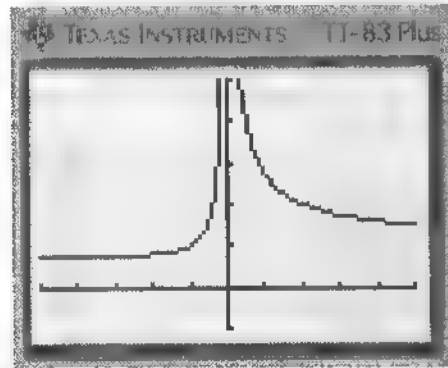
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x-1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\ln(-x)}{(-x)} \cdot \frac{-x}{x-1}} = 1$$

(1) * استمرارية الدالة g عند 1 : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e = g(1)$ ومنه الدالة g مستمرة عند 1 .

* انشاء (C_g) . (بالآلة)



دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا : $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ومنه : $f(x) = e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2}$

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2} = +\infty$$

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \frac{10^{2x} + 2 \cdot 10^x \cdot 10^{-x} + 10^{-2x}}{4} - \frac{10^{2x} - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{-x} + 10^{-2x}}{4} = \frac{10^{2x} + 2 + 10^{-2x} - 10^{2x} + 2 - 10^{-2x}}{4} = 1$$

(3) دراسة تغيرات f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10^x - 10^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln 10} - e^{-x \ln 10}}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x - 10^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 10} - e^{-x \ln 10}}{2} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{e^{x \ln 10} - e^{-x \ln 10}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(Ln 10) e^{x \ln 10} + (Ln 10) e^{-x \ln 10}}{2}$$

ومنه : $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على \mathbb{R} .

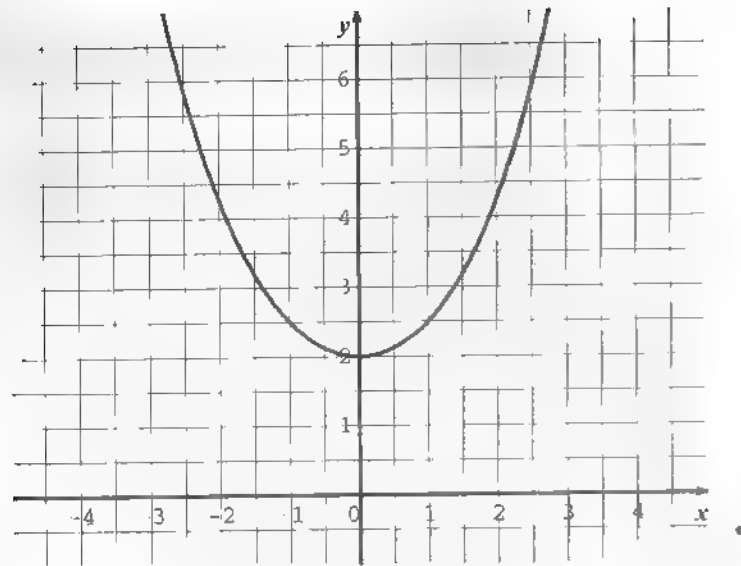
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$f(-2) = \frac{10^{-2} - 10^2}{2} = \frac{\frac{1}{100} - 100}{2} = \frac{-9999}{200}$$

$$f(0) = \frac{10^0 - 10^0}{2} = 0 \quad ; \quad f(-1) = \frac{10^{-1} - 10}{2} = \frac{-99}{20}$$

$$f(2) = \frac{10^2 - 10^{-2}}{2} = \frac{9999}{200} \quad ; \quad f(1) = \frac{10 - 10^{-1}}{2} = \frac{99}{20}$$

التمرين 7 :
(1) دراسة استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها :



التمرين 9 :

(1) مجموعة التعريف : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 10^x - 1 \neq 0\}$

$10^x - 1 = 0$ تكافئ $10^x = 1$ وعليه : $x = 0$

إذن : $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

(2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln 10}}{e^{x \ln 10} - 1} = 0$ $f(x) = \frac{e^{x \ln 10}}{e^{x \ln 10} - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 10}}{e^{x \ln 10} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 10}}{e^{x \ln 10} \left(1 - \frac{1}{e^{x \ln 10}}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-x \ln 10}} = 1$$

(3) حساب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(\ln 10) e^{x \ln 10} \cdot (e^{x \ln 10} - 1) - e^{x \ln 10} \cdot (\ln 10) \cdot e^{x \ln 10}}{(e^{x \ln 10} - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2} + \infty$$

$$\bullet f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} - \ln 2 \cdot e^{-x \ln 2}$$

إذن : $f'(x) = \ln 2 (e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2})$

لدينا : $f'(x) = 0$ تكافئ : $e^{x \ln 2} - e^{-x \ln 2} = 0$

وعليه : $e^{x \ln 2} = e^{-x \ln 2}$ ومنه : $x \ln 2 = -x \ln 2$

إذن : $2x \ln 2 = 0$ وبالتالي : $x = 0$

لدينا : $f'(x) > 0$ تكافئ : $e^{x \ln 2} > e^{-x \ln 2}$

ومنه : $x \ln 2 > -x \ln 2$ وعليه : $2x \ln 2 > 0$

إذن : $x > 0$ ومنه f متزايدة تماما .

ومنه : $f'(x) < 0$ تكافئ : $x < 0$ ومنه f متناقصة تماما .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

• دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2} + e^{-x \ln 2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2} \times \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot e^{-x \ln 2} = +\infty$$

إذن يوجد فرع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{x \ln 2} - \frac{e^{-x \ln 2}}{-x \ln 2} \times \ln 2 = -\infty$$

إذن يوجد فرع قطع باتجاه محور الترتيب عند $-\infty$.

رسم الملحق :

* النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

* المشتق : $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

وعليه : $g'(x) > 0$. ومنه g متزايدة تماما على D_g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

وعليه إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

(2) دراسة تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = x^{x-1}$ أي : $f(x) = e^{(x-1)\ln x}$.
* مجموعة التعريف : $D_f =]0 ; +\infty[$.

* النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(x-1)\ln x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-1)\ln x} = +\infty$

* المشتق : $f'(x) = \left(1 \cdot \ln x + (x-1) \frac{1}{x} \right) e^{(x-1)\ln x}$

ومنه : $f'(x) = g(x) \cdot e^{(x-1)\ln x}$ إذن : $f'(x)$ له نفس إشارة $g(x)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+

إذن f متزايدة تماما على المجال $[1 ; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0 ; 1]$.

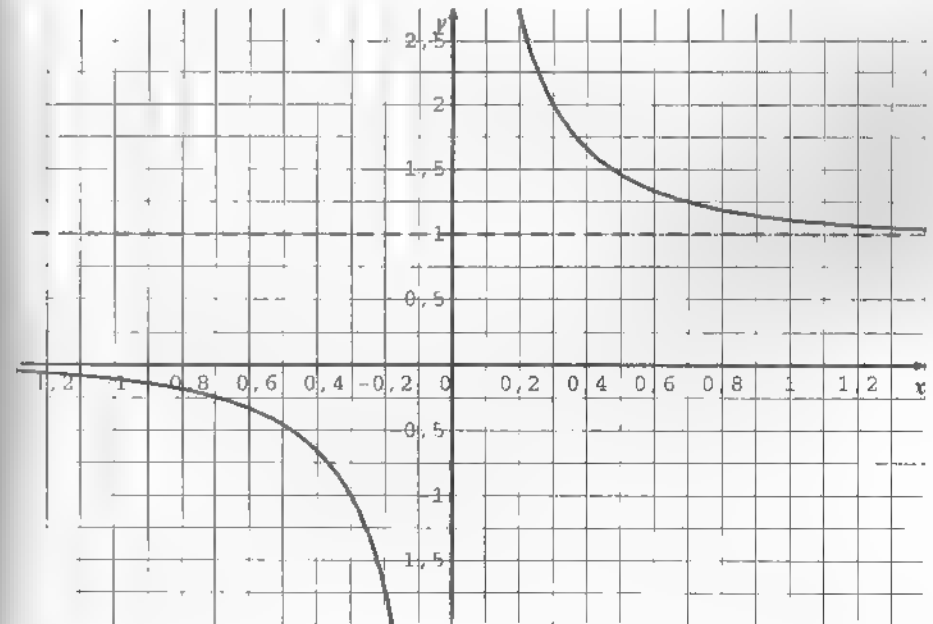
إذن : $f'(x) = \frac{-\ln 10 \cdot e^{x \ln 10}}{(e^{x \ln 10} - 1)^2}$ ومنه : $f'(x) < 0$

وعليه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0 ; +\infty[$ و $]-\infty ; 0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	0	$+\infty$	1

(4) إنشاء (C) :

لدينا : $x = 0$; $y = 0$; $y = 1$ معادلات المستقيمات المقاربة.



التمرين 10 :

(1) دراسة تغيرات الدالة g حيث : $g(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$

* مجموعة التعريف : $D_g =]0 ; +\infty[$

8- المتتاليات و الاستدلال بالتراجع

1- الاستدلال بالتراجع :

تعريف :

لتكن $p(n)$ خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي n .

نقول عن $p(n)$ أنها صحيحة من أجل $n \geq n_0$ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

(1) $p(n_0)$ صحيحة.

(2) إذا كانت $p(k)$ صحيحة فإن $p(k+1)$ صحيحة.

مثال 1 :

$$p(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{الخاصية :}$$

الحل :

(1) من أجل $n=1$ لدينا : $1=1$ ومنه $p(1)$ صحيحة .

$$(2) \text{ نفرض صحة } p(k) \text{ أي : } 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

نبرهن صحة $p(k+1)$ أي نبرهن أن :

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ومنه : $p(k+1)$ صحيحة وعليه : $p(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 1$.

مثال 2 :

نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد A_n يقبل القسمة على

$$A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1} \quad \text{حيث :}$$

مثال 3 :

الخاصية $p(n)$ هي : A_n يقبل القسمة على العدد 7 .

لدينا : $A_0 = 9 - 2 = 7$ ومنه A_0 يقبل القسمة على العدد 7 .

نبرهن صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

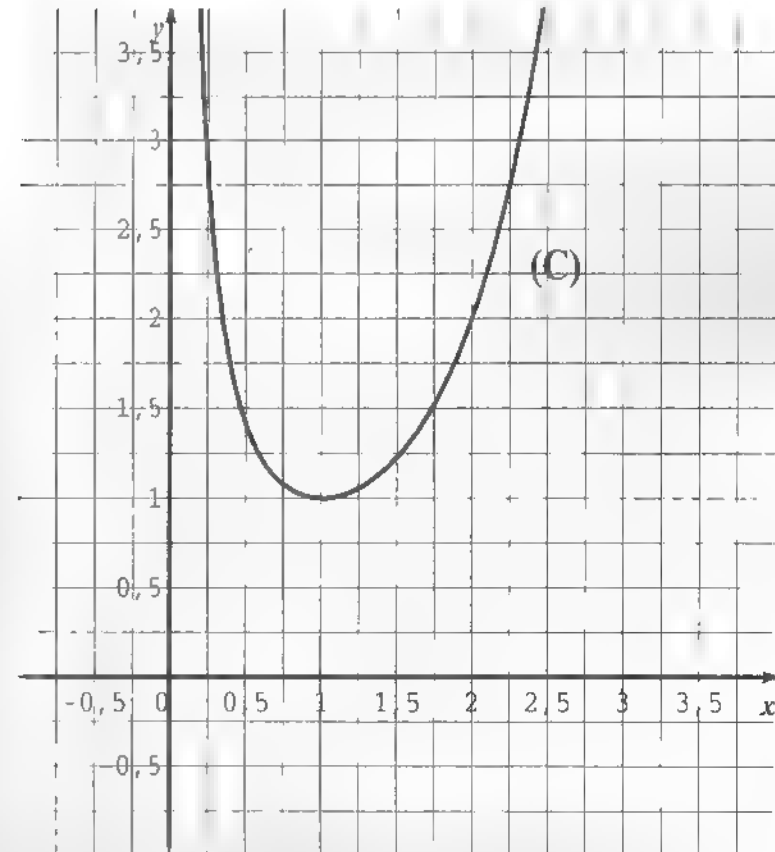
* دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

لدينا : $x=0$ معادلة مستقيم مقارب .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x-1)\ln x}}{(x-1)\ln x} \times \frac{(x-1)\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x-1)\ln x}}{(x-1)\ln x} \times \frac{x-1}{x} \times \ln x = +\infty$$

وعليه بيان الدالة f يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الترتيب عند $+\infty$.



حيث f دالة متزايدة على مجال I يشمل كل حدود المتتالية فإن المتتالية (U_n) رتيبة .

3- المتتالية الحسابية :

- وهي معرفة بحددها الأول U_0 وبالعلاقة التراجعية :

$$U_{n+1} = U_n + r, \quad r \in \mathbb{R}$$

r يسمى أساس المتتالية الحسابية .

$$U_n = U_0 + nr, \quad n \geq 0$$

$$U_n = U_1 + (n-1)r, \quad n \geq 1$$

$$U_n = U_p + (n-p)r, \quad n \geq p$$

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$S = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$$

حيث $n+1$ هو عدد الحدود .

4- المتتالية الهندسية :

- وهي معرفة بحددها الأول U_0 وبالعلاقة التراجعية

$$U_{n+1} = U_n \times q, \quad q \in \mathbb{R}$$

q يسمى أساس المتتالية الهندسية .

- وحددها العام :

$$U_n = U_0 \times q^n, \quad n \geq 0$$

$$U_n = U_1 \times q^{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$U_n = U_p \times q^{n-p}, \quad n \geq p$$

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$S = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad : q \neq 1$$

$$S = (n+1) U_0 \quad : q = 1$$

حيث $n+1$ هو عدد الحدود .

9 نهاية متتالية :

بلى نهايات المتتاليات المدروسة سابقا صحيحة عندما : $n \rightarrow +\infty$ ولدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln a} = +\infty, \quad a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln a} = 0, \quad 0 < a < 1$$

$$= 3^2 \times 3^{2k+2} - 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$= 9 \times 3^{2k+2} - 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$= (7 + 2) \times 3^{2k+2} - 2 \cdot 2^{k+1}$$

$$= 7 \cdot 3^{2k+2} + 2 \times 3^{2k+2} - 2 \times 2^{k+1}$$

$$= 7 \cdot 3^{2k+2} + 2 \times (3^{2k+2} - 2^{k+1})$$

$$A_{k+1} = 7 \cdot 3^{2k+2} + 2 \cdot A_k$$

بما أن : A_k و $7 \cdot 3^{2k+2}$ يقبلان القسمة على العدد 7 فإن A_{k+1} كذلك .

إذن $p(k+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2- المتتاليات التراجعية :

تعريف :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

نسمي متتالية تراجعية كل متتالية من الشكل :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha ; U_1 = \beta \\ U_{n+1} = \alpha f(U_n) + \beta f(U_{n-1}) \end{cases}$$

حيث f دالة معينة ؛ أو

مثال 1 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 5U_n - 1 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نعرف المتتالية (U_n) كما يلي :

وهي متتالية تراجعية حيث يمكن حساب بقية الحدود فمثلا :

$$U_1 = 5U_0 - 1 \quad \text{ومنه : } U_1 = 4$$

$$U_2 = 5U_1 - 1 \quad \text{ومنه : } U_2 = 19 \quad \text{وهكذا .}$$

مثال 2 :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_1 = 3 \\ U_{n+1} = 2U_n - 4U_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

نعرف المتتالية (U_n) كما يلي :

$$U_2 = 2U_1 - 4U_0 \quad \text{وهي متتالية تراجعية حيث يمكن حساب باقي الحدود فمثلا :}$$

$$U_2 = -2, \quad U_3 = 2U_2 - 4U_1 \quad \text{ومنه : } U_3 = -16 \quad \text{وهكذا .}$$

مبرهنة :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

إذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بـ :

التمارين

التمرين 1 :

- ضع العلامة \checkmark أمام كل جملة صحيحة و العلامة \times أمام كل جملة خاطئة .

(1) المتتالية (U_n) المعرفة بحددها العام : $U_n = 4^n$ هي متتالية حسابية.

(2) المتتالية (U_n) المعرفة بحددها العام :

$U_n = 4 \cdot 2^n - 5$ هي متتالية هندسية.

(3) $(8 + 9 + 10 + \dots + 100) = \frac{(100 - 7)(8 + 100)}{2}$

(4) $(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{100}) = \frac{1 - 5^{100}}{1 - 5}$

(5) $(10 + 10^2 + 10^2 + \dots + 10^{50}) = 10 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10}$

(6) المتتاليتان (U_n) و (V_n)

حيث $U_n = \frac{-10}{n^2}$ و $V_n = \frac{10}{n^2}$ متجاورتان.

(7) في متتالية حسابية (U_n) هي دالة تألفية .

(8) في متتالية هندسية (U_n) هي دالة قوى العدد n .

(9) إذا كانت الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$ فهي صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(10) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-10)^n = -\infty$

التمرين 2 :

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^n} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$$

التمرين 3 :

/ دالة معرفة بالعلاقة : $f(x) = (ax + b)e^x$ حيث a و b عدنان حقيقيان .
برهن أن المشتق النوني للدالة f معرف بالعلاقة :

من أجل $-1 < a < 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \times (-a)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n e^{n \ln(-a)} = 0$$

من أجل $a \leq -1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \times (-a)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n e^{n \ln(-a)}$$

وهي غير موجودة لأنها غير وحيدة فمن أجل n زوجي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$$

ومن أجل n فردي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = -\infty$$

أمثلة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ ؛ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ ؛ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{3} \right)^n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-4)^n$ غير موجودة .

6- المتتاليتان المتجاورتان :

نقول عن المتتاليتان (U_n) و (V_n) أنهما متجاورتان إذا كانت إحداها متزايدة والأخرى

متناقصة وكانت : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$

مثال :

المتتاليتان (U_n) و (V_n) المعرفتان كما يلي :

$U_n = \frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{-1}{n}$ متجاورتان لأن (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة.

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$

مبرهنة :

إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان حيث (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة ،

• $U_n \leq V_n$ ، $n \in \mathbb{N}$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lambda$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ • $U_n \leq \lambda \leq V_n$

التمرين 4 :

- (1) برهن بالتراجع على n أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $(1+x)^n \geq 1+nx$
 (2) ما هو التفسير البياني لهذه الخاصية.
 التمرين 5 :

(U_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 16 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 20} , n \geq 0 \end{cases}$$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \geq 5$.

(2) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة.

(3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة

(4) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

التمرين 6 :

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحددها الأول U_0 وبالعلاقة التراجعية :

$$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$$

1- احسب $U_{n+1} - 1$ بدلالة $U_n - 1$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n - 1 = (U_0 - 1)^{2^n}$

3- ماذا يمكن القول في كل حالة مما يلي : $U_0 = 1$; $U_0 = 2$.

4- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ في حالة $U_0 \in]0 ; 1[$; $U_0 \in]1 ; 2[$; ثم في حالة $U_0 \in]2 ; +\infty[$.

5- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ في حالة $U_0 < 0$ ثم $U_0 > 2$.

التمرين 7 :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} , n \geq 0 \end{cases}$$

لتكن المتتالية المعرفة كما يلي :

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \leq U_n \leq 1$.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n = \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^n} \right)$

3- استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين 8 :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_1 = 1 \\ V_{n+1} = V_n + V_{n-1} , n \geq 1 \end{cases}$$

(V_n) متتالية معرفة كما يلي :

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$V_n = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{5}} \left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \right]$$

التمرين 9 :

$$\begin{cases} X_0 = \alpha \\ X_n = 10 X_{n-1} + 20 , n \geq 1 \end{cases}$$

(1) عبر عن X_n بدلالة α و n .

(2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$.

التمرين 10 :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + \frac{2}{3} \end{cases}$$

(U_n) متتالية معرفة كما يلي :

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \geq 1$.

(2) (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $V_n = U_n - 1$

- برهن أن (V_n) متتالية هندسية.

- استنتج اتجاه تغير (V_n).

- احسب V_n و U_n بدلالة n .

(3) احسب المجموعين : S_1 , S_2 بدلالة n حيث :

$$S_1 = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1} \text{ و } S_2 = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$$

(4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0^3 + U_1^3 + \dots + U_{n-1}^3$

ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(3) ما هو سعر السكر في سنة 2020 ؟

(4) بعد كم سنة يصير سعر السكر أكبر من 3 أضعاف ما كان عليه سنة 2006 .

التمرين 14 :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 2}{2U_n - 1} \end{cases} ; n \geq 0$$

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $U_n \neq 1$.

2- (V_n) متتالية معرفة كما يلي : $V_{n+1} = \frac{1}{U_n - 1}$, $n \geq 0$.

- بين أن (V_n) متتالية حسابية بطلب إعطاء حدها الأول .

- احسب U_n و V_n بدلالة n - احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

التمرين 15 :

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} ; n \geq 0 ; \begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases} ; n \geq 0$$

1- احسب U_1, V_1, U_2, V_2 .

2- نعرف المتتاليتان (W_n) كما يلي : $W_n = U_n - V_n$.

برهن أن (W_n) متتالية هندسية متقاربة .

3- بين أن المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان .

4- نعرف المتتالية (X_n) كما يلي : $X_n = 3U_n + 8V_n$.

برهن أن المتتالية (X_n) ثابتة .

5- استنتج U_n و V_n بدلالة n ثم : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

التمرين 11 :

(U_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$U_1 = 2 ; U_2 = 1 \text{ و من أجل } n \geq 2 : U_n = \frac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3}$$

(V_n) متتالية معرفة كما يلي : $V_n = U_n - U_{n-1}$, $n \geq 2$.

1- احسب V_n بدلالة V_{n-1} .

2- بين أن (V_n) متتالية هندسية معينة حدها الأول ثم اكتب V_n بدلالة n .

3- احسب المجموعة $S_n = V_2 + V_3 + \dots + V_n$ بدلالة n .

4- احسب S_n بدلالة U_n و U_1 .

5- استنتج عبارة U_n بدلالة n .

6- احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

التمرين 12 :

$$\begin{cases} U_1 \times U_3 = 144 \\ U_1 + U_2 + U_3 = 63 \end{cases}$$

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

1- احسب كل من q أساس المتتالية و U_1, U_2, U_3 -2- اكتب U_n بدلالة n

3- احسب المجاميع : S_n, S'_n حيث :

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n \text{ و } S'_n = U_1^3 + U_2^3 + \dots + U_n^3$$

4- ما هي رتبة أول حد في المتتالية (U_n) - أصغر من 3×10^{-4} .

5- لتكن (V_n) متتالية معرفة كما يلي : $V_n = \ln U_n$.

بين أن (V_n) متتالية حسابية .

- احسب المجموع : $S = V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

التمرين 13 :

سعر الكيلوغرام الواحد من السكر هو 65DA في 1 جانفي 2006 . نفرض أن سعر الكيلوغرام

الواحد يتزايد سنويا بنسبة قدرها 4% .

(1) ما هو سعر السكر في 1 جانفي 2007 .

(2) نعرف متتالية (U_n) على \mathbb{N} كما يلي : $U_{n+1} - U_n = 0,04 U_n$

- ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ؟

- احسب U_n بدلالة n وحدها الأول U_1 .

- احسب المجموع : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ بدلالة n و U_1 .

الحلــــــــــــــــول

التمرين 1 :

(1) ×	(2) ×	(3) √	(4) ×
(5) √	(6) √	(7) √	(8) √
(9) ×	(10) ×		

التمرين 2 :

نضع :
$$p(n) : 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$$

- من أجل $n = 0$ لدينا :

أي $1 = \frac{4}{3} \left[1 - \frac{1}{4} \right]$ صحيحة ومنه : $p(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$.

$$p(k) : 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} \right]$$

$$p(k+1) : 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{k+2} \right]$$

لدينا :
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} \right] + \frac{1}{4^{k+1}}$$

$$= \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{k+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4^{k+1}} \right]$$

$$= \frac{4}{3} \left[1 - \frac{1}{4^{k+1}} \left(1 - \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$= \frac{4}{3} \left[1 - \frac{1}{4^{k+2}} \right]$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 3 :

$$p(n) : f^{(n)}(x) = (ax + b + na) e^x$$

- من أجل $n = 1$: $f^{(1)}(x) = (ax + b + a) e^x$

ولدينا : $f'(x) = a \cdot e^x + (ax + b) e^x$

وبالتالي : $f'(x) = (ax + b + a) e^x$ ومنه $p(1)$ صحيحة .

- نفرض $p(k)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : f^{(k)}(x) = (ax + b + ka) e^x$$

$$p(k+1) : f^{(k+1)}(x) = (ax + b + (k+1)a) e^x$$

لدينا : $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x)$

ومنه :
$$f^{(k+1)}(x) = a e^x + (ax + b + ka) e^x$$

$$= (ax + b + ka + a) e^x$$

$$= (ax + b + (k+1)a) e^x$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وبالتالي $p(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 1$.

التمرين 4 :

نفرض : $p(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$

(1) البرهان بالتراجع :

- من أجل $n = 0$ لدينا : $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x$

ومنه : $1 \geq 1$ صحيحة إذن $p(0)$ صحيحة .

- نفرض $p(k)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(k+1)$.

$$p(k) : (1+x)^k \geq 1 + kx$$

$$p(k+1) : (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

لدينا :
$$(1+x)^k \geq 1 + kx$$

ومنه :
$$(1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

أي :
$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + x + kx + kx^2$$

إذن :
$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + kx^2$$

لكن : $kx^2 \geq 0$ ومنه : $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وبالتالي $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) التفسير الهندسي :

بعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = (1+x)^n$

ولكن (C) تمثيلها البياني . معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

حيث : $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ ؛ $f(0) = (1+0)^n = 0$

ومنه : $f'(0) = n(1+0)^{n-1} = n$

وبالتالي معادلة المماس هي : $y = 1 + nx$

وبما أن : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ أي : $f(x) \geq y$

فإن البيان (C) يقع فوق المماس .

التمرين 5 :

(1) نفرض : $U_n \geq 5$: $p(n)$

- من أجل $n=0$: $U_0 \geq 5$ وهي صحيحة لأن $U_0 = 16$

- نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

لدينا : $p(k) : U_k \geq 5$ ؛ $p(k+1) : U_{k+1} \geq 5$

من : $U_k \geq 5$ ينتج : $U_k + 20 \geq 25$

ومنه : $\sqrt{U_k + 20} \geq \sqrt{25}$ إذن : $U_{k+1} \geq 5$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) ثيبان أن (U_n) متناقصة :

لدينا : $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 20} - U_n$

$$= \frac{(\sqrt{U_n + 20} - U_n)(\sqrt{U_n + 20} + U_n)}{\sqrt{U_n + 20} + U_n}$$

$$= \frac{U_n + 20 - U_n^2}{\sqrt{U_n + 20} + U_n} = \frac{-U_n^2 + U_n + 20}{\sqrt{U_n + 20} + U_n}$$

لدينا : $\sqrt{U_n + 20} + U_n > 0$ لأن : $U_n \geq 5$

ومنه إشارة $U_{n+1} - U_n$ من إشارة : $-U_n^2 + U_n + 20$

لدينا : $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(20) = 81$

وعليه يوجد جذران هما : 5 و -4 و بالتالي إشارة $-U_n^2 + U_n + 20$ هي :

U_n	$-\infty$	-4	5	$+\infty$
$-U_n^2 + U_n + 20$	-	○	○	-

بما أن $U_n \geq 5$ فإن : $-U_n^2 + U_n + 20 \leq 0$

ومنه $U_{n+1} - U_n \leq 0$ وعليه (U_n) متناقصة تماما.

(3) المتتالية (U_n) محدودة من الأدنى و متناقصة فهي متقاربة .

(4) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$:

نفرض $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ فتكون $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \ell$

ولدينا $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 20}$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{U_n + 20}$

وعليه $\ell = \sqrt{\ell + 20}$ إذن $\ell^2 = \ell + 20$ أي $\ell^2 - \ell - 20 = 0$

وحسب السابق للمعادلة حلين 5 (مقبول) و -4 (مرفوض) إذن : $\ell = 5$.

التمرين 6 :

(1) حساب : $U_{n+1} - 1$ بدلالة $U_n - 1$

لدينا : $U_{n+1} - 1 = U_n^2 - 2U_n + 2 - 1$

ومنه : $U_{n+1} - 1 = U_n^2 - 2U_n + 1$

إذن : $U_{n+1} - 1 = (U_n - 1)^2$

(2) البرهان بالتراجع على صحة $p(n) : U_n - 1 = (U_0 - 1)^{2^n}$

- من أجل $n=0$: $U_0 - 1 = (U_0 - 1)^{2^0}$

وعليه : $U_0 - 1 = U_0 - 1$ ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k) : U_k - 1 = (U_0 - 1)^{2^k}$

$p(k+1) : U_{k+1} - 1 = (U_0 - 1)^{2^{k+1}}$

لدينا من (1) : $U_{k+1} - 1 = (U_k - 1)^2$

ومن فرضية التراجع ينتج : $U_{k+1} - 1 = [(U_0 - 1)^{2^k}]^2$

ومنه : $U_{k+1} - 1 = (U_0 - 1)^{2 \times 2^k} = (U_0 - 1)^{2^{k+1}}$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة.

وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(1) في حالة $U_0 = 1$ لدينا : $U_n - 1 = (1 - 1)^{2^n} = 0$

ومنه $U_n = 1$ وعليه (U_n) متتالية ثابتة .

وعليه : $0 \leq U_{k+1} \leq 1$: إذن $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq U_{k+1} \leq 1$
ومنه $p(k+1)$ صحيحة و عليه $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$U_n = \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^n} \right) : p(n) \text{ البرهان على صحة}$$

- من أجل $n=0$ لدينا : $U_0 = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ ومنه $p(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : U_k = \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^k} \right) \text{ لدينا :}$$

$$p(k+1) : U_{k+1} = \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}} \right)$$

$$U_{k+1} = \sqrt{\frac{1+U_k}{2}} \text{ ولدينا : ومنه :}$$

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^k} \right)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \times 2^k \times 2} \right) - 1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}} \right)}{2}} = \left| \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\text{لكن } U_n \geq 0 \text{ ومنه } U_{k+1} = \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^{k+1}} \right) \text{ إذن } p(k+1)$$

صحيحة و عليه الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{(1) استنتاج : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

$$\text{أيضا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi}{3 \times 2^n} \right) = 1 \text{ لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

- في حالة $U_0 = 2$ لدينا : $U_n - 1 = (2 - 1)^{2^n} = 1$

ومنه : $U_n = 2$ و عليه (U_n) متتالية ثابتة.

(4) - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ في حالة $U_0 \in]0; 1[$:

لدينا : $U_n - 1 = (U_0 - 1)^{2^n}$ ومنه : $U_n = 1 + (U_0 - 1)^{2^n}$

وبما أن : $-1 < U_0 - 1 < 0$ ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_0 - 1)^{2^n} = 0$: إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

- في حالة $U_0 \in]1; 2[$ لدينا : $0 < U_0 - 1 < 1$

وبما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_0 - 1)^{2^n} = 0$

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + (U_0 - 1)^{2^n} = 1$

(5) - حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ في حالة $U_0 < 0$:

بما أن : $U_0 - 1 < -1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_0 - 1)^{2^n}$ غير موجودة ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ كذلك.

- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ في حالة $U_0 > 2$

بما أن : $U_0 - 1 > 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_0 - 1)^{2^n} = +\infty$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

التمرين 7 :

(1) البرهان على صحة $p(n) : 0 \leq U_n \leq 1$

- من أجل $n=0$: $U_0 = \frac{1}{2}$ ومنه $0 \leq U_0 \leq 1$ صحيحة

و عليه $p(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : 0 \leq U_k \leq 1 \quad ; \quad p(k+1) : 0 \leq U_{k+1} \leq 1$$

لدينا : $0 \leq U_k \leq 1$ و عليه : $1 \leq 1 + U_k \leq 2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{1+U_k}{2}} \leq 1 \text{ و عليه : } \frac{1}{2} \leq \frac{1+U_k}{2} \leq 1 \text{ ومنه :}$$

التمرين 8 :

$$V_n = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right] : p(n) \text{ البرهان على صحة}$$

$$V_0 = \frac{1}{2^0 \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^0 - (1 - \sqrt{5})^0 \right] = 0 : n=0 \text{ من أجل}$$

وعليه : $p(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$.

$$p(k) : V_k = \frac{1}{2^k \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k \right]$$

$$p(k+1) : V_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1} \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k+1} - (1 - \sqrt{5})^{k+1} \right]$$

$$V_{k+1} = V_k + V_{k-1} : \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \frac{1}{2^k \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k \right] \\ &\quad + \frac{1}{2^{k-1} \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k-1} - (1 - \sqrt{5})^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{2^k \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k + 2(1 + \sqrt{5})^{k-1} - 2(1 - \sqrt{5})^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{2^k \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k-1} (1 + \sqrt{5} + 2) - (1 - \sqrt{5})^{k-1} (1 - \sqrt{5} + 2) \right] \\ &= \frac{1}{2^k \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k-1} (3 + \sqrt{5}) - (1 - \sqrt{5})^{k-1} (3 - \sqrt{5}) \right] \\ &= \frac{1}{2^{k+1} \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k-1} (1 + 2\sqrt{5} + 5) - (1 - \sqrt{5})^{k-1} (1 - 2\sqrt{5} + 5) \right] \\ &= \frac{1}{2^{k+1} \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k-1} (6 + 2\sqrt{5}) - (1 - \sqrt{5})^{k-1} (6 - 2\sqrt{5}) \right] \\ &= \frac{1}{2^{k+1} \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k-1} (1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^{k-1} (1 - \sqrt{5})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2^{k+1} \cdot \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{k+1} - (1 - \sqrt{5})^{k+1} \right] \end{aligned}$$

وعليه $p(k+1)$ صحيحة . إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 9 :

1- التعبير عن X_n بدلالة α و n لدينا

$$10^0 \times X_n = 10 X_{n-1} + 20$$

$$10^1 \times X_{n-1} = 10 X_{n-2} + 20$$

$$10^2 \times X_{n-2} = 10 X_{n-3} + 20$$

$$10^{n-3} \times X_3 = 10 X_2 + 20$$

$$10^{n-2} \times X_2 = 10 X_1 + 20$$

$$10^{n-1} \times X_1 = 10 X_0 + 20$$

$$X_n = 10^n \cdot X_0 + 20 (10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) : \text{ بالجمع نجد}$$

$$X_n = 10^n \cdot X_0 + 20 \cdot 1 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} : \text{ ومنه}$$

$$X_n = 10^n \cdot X_0 - \frac{20}{9} (1 - 10^n)$$

$$X_n = 10^n \cdot \alpha - \frac{20}{9} (1 - 10^n)$$

$$X_n = \left(\alpha + \frac{20}{9} \right) 10^n - \frac{20}{9} : \text{ إذن}$$

$$2- \text{ حساب } \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n :$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n = +\infty : \text{ لدينا ومنه من أجل}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \frac{-20}{9} : \text{ فما إن } \alpha = \frac{-20}{9} : \text{ ومنه } X_n = \frac{-20}{9}$$

$$\alpha > \frac{-20}{9} : \text{ من أجل } \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$$

$$\alpha < \frac{-20}{9} : \text{ من أجل } \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty$$

التمرين 10 :

$$U_n \geq 1 : \text{ البرهان على صحة الخاصية } (n)$$

$$U_0 = 4 : n=0 \text{ من أجل ومنه } U_0 \geq 1 \text{ وعليه } p(0) \text{ صحيحة.}$$

$$S_2 = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$$

$$S_2 = (V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \dots + (V_{n-1} + 1)$$

$$= (V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}) + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ مرة}}$$

$$S_2 = S_1 + n \times 1$$

$$S_2 = \frac{9}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] + n$$

حساب - 4 : S_n

$$S_n = U_0^3 + U_1^3 + \dots + U_{n-1}^3$$

$$S_n = (V_0 + 1)^3 + (V_1 + 1)^3 + \dots + (V_{n-1} + 1)^3$$

$$S_n = (V_0^3 + 3V_0^2 + 3V_0 + 1) + (V_1^3 + 3V_1^2 + 3V_1 + 1) + \dots + (V_{n-1}^3 + 3V_{n-1}^2 + 3V_{n-1} + 1)$$

$$S_n = V_0^3 + V_1^3 + \dots + V_{n-1}^3 + 3(V_0^2 + V_1^2 + \dots + V_{n-1}^2) + 3(V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ مرة}}$$

$$S_n = V_0^3 + (V_0 q)^3 + \dots + (V_0 q^{n-1})^3 + 3[V_0^2 + (V_0 q)^2 + \dots + (V_0 q^{n-1})^2] + 3S_1 + n \cdot 1$$

$$S_n = V_0^3 [1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3(n-1)}] + 3V_0^2 [1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2(n-1)}] + 3S_1 + n$$

$$S_n = V_0^3 \times \frac{1 - (q^3)^n}{1 - q^3} + 3V_0^2 \cdot \frac{1 - (q^2)^n}{1 - q^2} + 3S_1 + n$$

$$S_n = V_0^3 \times \frac{1 - q^{3n}}{1 - q^3} + 3V_0^2 \cdot \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^2} + 3S_1 + n$$

$$S_n = 3^3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3} + 3(3)^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} + 3S_1 + n$$

$$p(k) : U_k \geq 1$$

$$p(k+1) : U_{k+1} \geq 1$$

$$\frac{1}{3} U_k \geq \frac{1}{3} \quad \text{ومنه} \quad U_k \geq 1 \quad \text{لدينا}$$

$$\text{وعليه} : \frac{1}{3} U_k + \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \quad \text{وبالتالي} : U_{k+1} \geq 1$$

إذن $p(k+1)$ صحيحة ومنه الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2- نبرهن أن (V_n) متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{3} U_n + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} U_n - \frac{1}{3}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n \quad \text{وبالتالي} : V_{n+1} = \frac{1}{3} (U_n - 1)$$

$$\text{وعليه} : (V_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{3}$$

- استنتاج اتجاه تغير (V_n) :

$$\text{بما أن } V_0 = U_0 - 1 = 3 \text{ أي } V_0 > 0$$

ولدينا : $0 < q < 1$ فن (V_n) متناقصة تماماً

- حساب V_n و U_n بدلالة n :

$$V_n = V_0 \times q^n \quad \text{ومنه} : V_n = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$\text{إذن} : V_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{و} \quad U_n = V_n + 1 = \frac{1}{3^{n-1}} + 1 \quad \text{ومنه} :$$

3- حساب المجموعين S_1 و S_2 :

$$S_1 = V_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_1 = \frac{9}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$$

$$V_n = - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-2} \quad \text{إذن :}$$

3- حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = V_1 \times \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} \quad \text{عدد الحدود : } n - 2 + 1 = n - 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$S_n = -1 \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = -\frac{3}{4} \times \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right] \quad \text{ومنه :}$$

$$S_n = -\frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right] \quad \text{إذن :}$$

4- حساب S_n بدلالة U_n و U_1 :

$$S_n = V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

$$S_n = (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + (U_4 - U_3) + \dots + (U_n - U_{n-1})$$

$$S_n = U_n - U_1$$

التمرين 12 :

1) حساب سعر السكر في سنة 2007 .
لنرض U_1 سعر السكر في سنة 2006 ، فيكون U_2 سعر السكر في سنة 2007 .

$$U_2 = U_1 + U_1 \times \frac{4}{100} = U_1 + U_1 \times 0,04$$

$$U_2 = 1,04 \times 65 \quad \text{أي : } U_2 = 1,04 \cdot U_1 \quad \text{ومنه :}$$

$$U_2 = 67,6 \quad \text{ومنه سعر السكر في سنة 2007 هو : } 67,6 \text{ DA}$$

2) طبيعة المتتالية (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = 0,04 U_n \quad \text{ومنه : } U_{n+1} = U_n + 0,04 U_n \quad \text{وعليه :}$$

$$U_{n+1} = 1,04 U_n \quad \text{إذن } (U_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 1,04 .$$

$$U_n = U_1 \times (1,04)^{n-1} \quad \text{ومنه : } U_n = U_1 \times q^{n-1} \quad \text{بحساب } U_n \text{ بدلالة } n \text{ و } U_1$$

$$S_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{لدينا :}$$

$$S_n = 27 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{3n}}{1 - \frac{1}{27}} + 27 \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2n}}{1 - \frac{1}{9}} + 3S_1 + n$$

$$S_n = \frac{(27)^2}{26} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{3n} \right] + \frac{27 \times 9}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} \right] + 3S_1 + n$$

$$S_n = \frac{729}{26} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{3n} \right] + \frac{243}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} \right] + 3 \times \frac{9}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] + n$$

$$S_n = \frac{729}{26} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{3n} \right] + \frac{243}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} \right] + \frac{27}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right] + n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \quad \text{لأن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$$

التمرين 11 :

1- حساب V_n بدلالة V_{n-1} .

$$V_n = U_n - U_{n-1} = \frac{2U_{n-1} + U_{n-2}}{3} - U_{n-1}$$

$$V_n = -\frac{U_{n-1} + U_{n-2}}{3} = -\frac{1}{3} (U_{n-1} - U_{n-2})$$

$$\text{إذن : } V_n = -\frac{1}{3} V_{n-1}$$

2- تبين أن (V_n) متتالية هندسية :

$$\text{بما أن : } V_n = -\frac{1}{3} V_{n-1} \quad \text{فإن } (V_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = -\frac{1}{3}$$

$$\text{وحدها الأول } V_2 = U_2 - U_1 = -1$$

- كتابة V_n بدلالة n :

$$V_n = V_2 \times q^{n-2} = (-1) \times \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-2}$$

$$3 U_k - 2 = 2 U_k - 1 \text{ : وعليه } \frac{3 U_k - 2}{2 U_k - 1} = 1 \text{ : معناه } U_{k+1} = 1$$

وبالتالي : $U_k = 1$ ومنه : $p(k+1)$ صحيحة :

إذن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

(2) نبرهن أن (V_n) متتالية حسابية :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{1}{\frac{3 U_n - 2}{2 U_n - 1} - 1} - \frac{1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{2 U_n - 1}{U_n - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{2 U_n - 2}{U_n - 1} = \frac{2(U_n - 1)}{U_n - 1}$$

ومنه : $V_{n+1} - V_n = 2$ وعليه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$.

$$V_0 = -1 \text{ : ومنه } V_n = \frac{1}{U_0 - 1}$$

حساب V_n بدلالة n : $V_n = -1 + 2n$

حساب U_n بدلالة n :

$$V_n(U_n - 1) = 1 \text{ : ومنه } V_n = \frac{1}{U_n - 1}$$

$$U_n = \frac{1 + V_n}{V_n} \text{ : وعليه } V_n \cdot U_n = 1 + V_n \text{ : وبالتالي}$$

$$U_n = \frac{2n}{2n - 1} \text{ : إذن } U_n = \frac{1 - 1 + 2n}{-1 + 2n}$$

حساب النهايات :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 + 2n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2n} = 1$$

تمرين 14 :

حساب $V_2, V_1 ; U_2, U_1$:

$$U_1 = \frac{U_0 + 2V_0}{3} = \frac{12 + 2}{3} = \frac{14}{3} \quad V_1 = \frac{U_0 + 3V_0}{4} = \frac{12 + 9}{4} = \frac{21}{4}$$

$$S_n = U_1 \times \frac{1 - (1,04)^n}{1 - 1,04} = U_1 \times \frac{1 - (1,04)^n}{-0,04}$$

$$S_n = \frac{-100 U_1}{4} [1 - (1,04)^n] = 25 U_1 [(1,04)^n - 1]$$

(3) نفرض V_n سعر السكر في سنة n فيكون V_{n+1} سعر السكر في السنة

$$V_{n+1} = V_n + V_n \times \frac{4}{100} \text{ : ولدينا}$$

$$V_{n+1} = 1,04 V_n \text{ : إذن}$$

إذن سعر السكر الجديد يتزايد حسب المتتالية الهندسية السابقة (U_n)

ومنه : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ بفرض V_1 هو سعر السكر في السنة 2007 .

$$V_n = 65 \times (1,04)^{n-1} \text{ : إذن}$$

$$V_{15} = 65 (1,04)^{14} \text{ : ومنه } V_{15} \text{ هو سعر السكر في سنة 2020 ؛ ومنه}$$

$$V_{15} = 112,5 \text{ : إذن } V_{15} \approx 112,5 \text{ : ومنه سعر السكر هو } 112,5 \text{ DA .}$$

(4) عدد السنوات التي يصير فيها السكر أكبر من 3 أضعاف ما كان عليه :

$$(1,04)^{n-1} \geq 3 \text{ : ومنه } V_1 \times (1,04)^{n-1} \geq 3 V_1 \text{ ؛ } V_n \geq 3 V_1$$

$$(n-1) \ln(1,04) \geq \ln 3 \text{ : ومنه } \ln(1,04)^{n-1} \geq \ln 3$$

$$n \geq 1 + \frac{\ln 3}{\ln(1,03)} \text{ : ومنه } (n-1) \geq \frac{\ln 3}{\ln(1,03)} \text{ : أي}$$

وعليه : $n \geq 39$ ومنه ابتداء من سنة 39 يصير سعر السكر أكبر من 3 أضعاف ما كان عليه في سنة 2006 .

التمرين 13 :

$$U_n \neq 1 \text{ } p(n) \text{ : البرهان على صحة الخاصية}$$

- من أجل $n = 0$: $U_0 = 0$ ومنه : $U_0 \neq 1$ ومنه : $p(0)$ صحيحة

- نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k+1) : U_{k+1} \neq 1 \text{ ؛ } p(k) : U_k \neq 1$$

لنبرهن بالعكس النقيض :

نفرض $U_k = 1$ ونبرهن أن $U_{k+1} = 1$

(5) استنتاج U_n و V_n بدلالة n :

لدينا : $X_n = X_0$ لأن (X_n) ثابتة ومنه : $3U_n + 8V_n = 3U_0 + 8V_0$

أي أن : $3U_n + 8V_n = 44$ ولدينا : $U_n - V_n = W_n$

وعليه : $U_n - V_n = W_0 \times q^n$ إذن : $U_n - V_n = 11 \left(\frac{1}{12} \right)^n$

$$\begin{cases} 3U_n + 8V_n = 44 \\ U_n - V_n = 11 \left(\frac{1}{12} \right)^n \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

وبضرب المساواة الثانية في 8 نجد :

$$\begin{cases} 3U_n + 8V_n = 44 \\ 8U_n - 8V_n = 88 \left(\frac{1}{12} \right)^n \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

بالجمع نجد : $11U_n = 44 + 88 \left(\frac{1}{12} \right)^n$ ومنه : $U_n = 4 + 8 \left(\frac{1}{12} \right)^n$

وعليه : $V_n = U_n - 11 \left(\frac{1}{12} \right)^n$ إذن : $V_n = 4 + 8 \left(\frac{1}{12} \right)^n - 11 \left(\frac{1}{12} \right)^n$

وبالمالي : $V_n = 4 - 3 \left(\frac{1}{12} \right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + 8 \left(\frac{1}{12} \right)^n = 4 \quad \cdot \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 3 \left(\frac{1}{12} \right)^n = 4$$

$$U_2 = \frac{U_1 + 2V_1}{3} = \frac{\frac{14}{3} + \frac{21}{2}}{3} = \frac{91}{18} \quad \cdot \quad V_2 = \frac{U_1 + 3V_1}{4} = \frac{\frac{14}{3} + \frac{63}{4}}{4} = \frac{254}{48}$$

(2) نبرهن أن (W_n) متتالية هندسية :

$$W_n = U_n - V_n$$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} - \frac{U_n + 3V_n}{4} \\ &= \frac{4U_n + 8V_n - 3U_n - 9V_n}{12} \end{aligned}$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{12} (U_n - V_n) = \frac{1}{12} \cdot W_n$$

ومنه (W_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

وبما أن $-1 < q < 1$ فإن (W_n) متقاربة

(3) تبيان أن (U_n) و (V_n) متجاورتان :

نبرهن أن (U_n) و (V_n) إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{-2(U_n - V_n)}{3}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3V_n}{4} - V_n = \frac{U_n - V_n}{4}$$

نلاحظ أن إشارة $U_{n+1} - U_n$ عكس إشارة $U_n - V_n$

وإشارة $U_{n+1} - U_n$ نفس إشارة $U_n - V_n$ وعليه اتجاه تغير المتتاليتين متعاكستان . إذا

كانت (U_n) متزايدة فإن (V_n) متناقصة وإذا كانت (U_n) متناقصة فإن (V_n) متزايدة

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$

إذن : (U_n) و (V_n) متجاورتان.

(4) نبرهن أن (X_n) ثابتة :

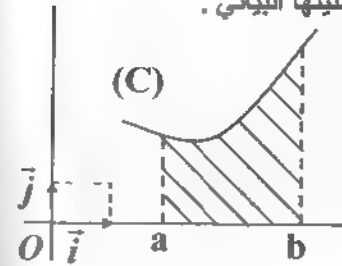
$$\begin{aligned} V_{n+1} - X_n &= 3U_{n+1} + 8V_{n+1} - 3U_n - 8V_n \\ &= U_n + 2V_n + 2U_n + 6V_n - 3U_n - 8V_n = 0 \end{aligned}$$

9 - الحساب التكاملي

1- الحساب التكاملي والمساحات :
تعريف :

لنكن f دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a, b]$ و (C) تمثيلها البياني .

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمان الذين معادلتيهما :
 $x = b$ و $x = a$



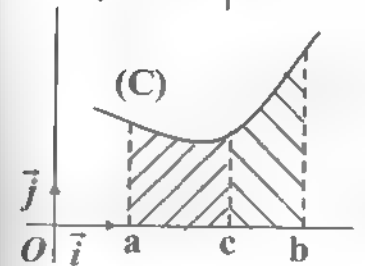
هي : $\int_a^b f(x) dx$ وتقرأ التكامل من a إلى b لـ f .

مثال : $f(x) = x + 1$

مساحة المثلث OAB هي : $S = \frac{1 \times 1}{2}$

إذن : $S = \frac{1}{2}$ (وحدة المساحة)

وعليه : $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}$
مبرهنة 1 :



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

تعريف 2 :

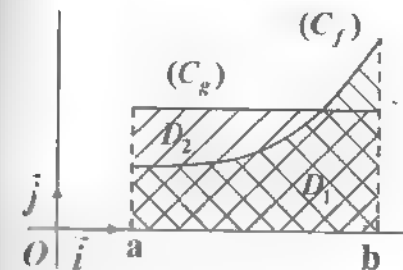
f دالة مستمرة وموجبة على مجال $[a, b]$. نسمي القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a, b]$ العدد الحقيقي :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

التفسير الهندسي :

g دالة ثابتة أي $g(x) = \alpha$

ليكن D_1 و D_2 المساحتين الملونتين في الشكل



حيث D_1 هو الجزء الأسفل (C_f) و D_2 هو الجزء الأسفل (C_g) القيمة المتوسطة للدالة f هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد α حتى يكون D_1 و D_2 متساويان.
تعريف 3 :

إذا كانت f دالة مستمرة وسالبة على المجال $[a, b]$ وكان (C) تمثيلها البياني فإن A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمتين $x = a$ و $x = b$ و $y = 0$ وتعطى بالعلاقة :

$$A = \int_a^b -f(x) dx \quad \text{أو} \quad A = - \int_a^b f(x) dx$$

مبرهنة 2 :

إذا كانت f دالة مستمرة وسالبة على مجال $[a, b]$ فإن قيمتها المتوسطة على $[a, b]$

$$\text{هي : } \frac{-1}{b-a} \int_a^b -f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} f(x) dx$$

مبرهنة 3 :

إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a, b]$ حيث $f > g$ فإن مساحة الحيز

المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمتين $x = a$ و $x = b$ معادلتيهما

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

الحساب التكاملي والدوال الأصلية :

مبرهنة 4 :

f دالة مستمرة وموجبة على المجال $[a, b]$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد F دالة

سلبية للدالة f على $[a, b]$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمتين $x = a$ و $x = b$ و $y = 0$ تساوي مقدرة بوحدة المساحات إلى :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{إذن} \quad F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

تعريف 4 :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a ; b]$. نسمي القيمة المتوسطة للدالة f على المجال

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx : [a ; b] \text{ العدد الحقيقي}$$

- المكاملة بالتجزئة :

مبرهنة 11 :

لتكن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و f' و g' مستمرتان على I .

من أجل كل عددين a و b من I فإن :

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx$$

4- الدالة الأصلية التي تنعدم عند a :

مبرهنة 12 :

f دالة مستمرة على $[a ; b]$. الدالة الأصلية g للدالة f التي تنعدم عند a تعطى

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ : بالعلاقة}$$

حساب بعض الحجوم :

f دالة مستمرة على مجال $[a ; b]$. (C) تمثيلها البياني و (D) مساحة الحيز المستوي

الحدود بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها :

$$x = b \text{ و } x = a \text{ و } y = 0$$

هم الجزء المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل يعطى بالعلاقة :

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = \int_a^b -f(x) dx$$

مبرهنة 5 :

لنرى g دالتان مستمرتان على مجال I .

a و b عنصران من I . α و β عددين حقيقيين

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

مبرهنة 6 :

f دالة مستمرة على مجال I مركزه O . من أجل كل عنصر a من I لدينا :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

مبرهنة 7 :

f دالة دورية على \mathbb{R} ودورها T

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

3- الحساب التكاملي و المتباينات :

مبرهنة 8 :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

مبرهنة 9 : f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a ; b]$. إذا كان $f \leq g$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

مبرهنة 10 :

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a ; b]$ و M, m عددين حقيقيين .

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M |b-a|$$

التمارين

التمرين 1 :

أذكر صحة أم خطأ مايلي باستعمال الرمز $\sqrt{\quad}$ للصحة و الرمز \times للخطأ :

(1) مساحة الحيز المستوي المحدد بمنحنى دالة f مستمرة على

مجال $[a; b]$ و المستقيمت التي معادلاتها :

$$y = 0 \text{ و } x = a \text{ و } x = b \text{ تعطى بالعلاقة : } \int_a^b f(x) dx$$

(2) القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto x^2$ على المجال $[3; 6]$

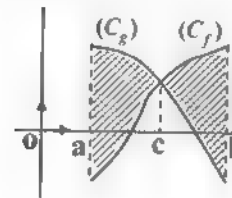
$$\text{هي : } \frac{1}{3} \int_3^6 x^2 dx = 63$$

(3) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمستقيمت التي معادلاتها : $x = 1$

و $x = 2$ و $y = 0$ و $y = 2$ مقدرة بوحدة المساحات هي : 4

(4) إليك الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل يعطى بالعلاقة :



$$A = \int_a^c [g(x) - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 = -2 \quad (5)$$

$$\int_0^x \cos t dt = \sin x \quad (6)$$

(7) إذا كان $f(x) \leq 1$ فإن $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_{\pi}^{3\pi} \sin x dx \quad (8)$$

$$\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x) dx \neq 0 \quad (10)$$

$$\int_1^2 [2f(x) - 3g(x)] dx = 2 \int_1^2 f(x) dx - 3 \int_1^2 g(x) dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx \leq \int_0^1 x^2 dx \quad (12)$$

$$\int_1^2 x^2 dx \leq 0 \quad (13)$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \int_2^1 (1 - x^2) dx \quad (14)$$

$$\int_0^1 dt = x \quad (15)$$

التمرين 2 :

احسب التكاملات الآتية :

$$1) \int_0^1 (x^2 - 4x + 5) dx$$

$$2) \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$3) \int_0^1 x (x^2 - 4)^3 dx$$

$$4) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x^3 + 3)^2} dx$$

$$5) \int_2^2 e^x dx$$

$$6) \int_0^1 (e^{2x} - e^x + 4) dx$$

$$7) \int_1^2 \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$8) \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx$$

$$10) \int_0^{\pi} \cos 3x dx$$

$$11) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$$

$$12) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$13) \int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

التمرين 3 :

فدالة معرفة على المجال $[-2; 1]$: $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}$: بالعلاقة :

1- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+2}$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2- عين دالة أصلية g للدالة f .

3- احسب : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

التمرين 4 :

فدالة معرفة على المجال $[-5; 5]$: $f(x) = \frac{25}{25 - x^2}$: بالعلاقة :

1- عين العددين α و β بحيث : $f(x) = \frac{\alpha}{5-x} + \frac{\beta}{5+x}$

2- احسب : $\int_{-2}^2 f(x) dx$

3- بين أن : $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$

4- احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي

معادلاتها : $x=0, x=2, y=0$ (الوحدة cm^2)

التمرين 5 :

فدالة معرفة على المجال $[0; 2]$: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$: بالعلاقة :

1- عين حصرا للدالة f على المجال $[0; 2]$.

2- استنتج حصرا للتكامل : $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$

التمرين 6 :

فدالة معرفة على \mathbb{R} : $f(x) = e^{x^2+1}$: بالعلاقة :

2- عين حصرا للدالة f على المجال $[0; 2]$.

3- استنتج حصرا للتكامل : $\int_0^2 f(x) dx$ ثم التكامل : $\int_{-2}^2 f(x) dx$

التمرين 7 :

فدالة معرفة على $[0; \frac{\pi}{2}]$: $f(x) = \cos x$: بالعلاقة :

عين القيمة المتوسطة للدالة f على هذا المجال .

التمرين 8 :

درس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ على المجال $[e; 2e]$.

استنتج حصرا للتكامل : $\int_e^{2e} \frac{x}{\ln x} dx$

التمرين 9 :

حسب باستعمال قانون المكاملة بالتجزئة التكاملات الآتية .

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx$ ؛ 2) $\int_0^{\pi} x \cos 3x dx$ ؛ 3) $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$

4) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ ؛ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ ؛ 6) $\int_0^1 (x+1) e^{-x} dx$

التمرين 10 :

حسب مرتين بقانون التجزئة التكاملات الآتية .

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ ؛ 2) $\int_0^x t^2 \sin 2t dt$ ؛ 3) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$

4) $\int_0^{\pi} \sin x e^x dx$

التمرين 11 :

درس تغيرات الدالة $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2}$

ثم انشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول cm)

احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل

(على حساب y^2)

(7) استنتج مما سبق قيمة مقربة إلى 0,01 للعدد 1.

التمرين 15 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة : $f(x) = \cos x$

(1) أنشئ تمثيلها البياني (C) على المجال $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. (D) مساحة الحيز

المحصور بين (C) و محور الفواصل في معط متعامد و متجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{O})$ حيث

وحدة هي Cm.

(2) احسب حجم الحيز الذي نحصل عليه بدوران (D) حول محور الفواصل .

التمرين 16 :

أنشئ التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

لتكن (D) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل.

احسب حجم الجسم المحصل عليه بدوران (D) حول محور الفواصل .

التمرين 17 :

لتكن f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1- بين أن : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

2- ادرس تغيرات الدالة f .

1- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي

معادلاتها : $x=0$ و $x=1$ و $y=1$.

التمرين 18 :

لنكن التكامل : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$ حيث : $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0 ; 1]$ فإن :

$$0 \leq (1-x)^n e^x \leq e$$

التمرين 12 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعلاقة $f(x) = e^{2x} - 7e^x + 12$

1- ادرس إشارة $f(x)$.

2- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) الممثل لتغيرات f في

معط متعامد و متجانس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{O})$ و محور الفواصل في المجال

$[Ln3 ; Ln4]$. (الوحدة cm^2)

التمرين 13 :

احسب التكامل الآتي : $\int_{-2}^5 \frac{|x|}{1+x^2} dx$

التمرين 14 :

(1) ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

فإن : $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

(2) نعتبر التكامل : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx$. ما هو التفسير الهندسي لهذا التكامل ؟

(3) بين أن : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$ من أجل $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$

(4) استنتج أن : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$

(5) احسب : $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx$

(6) استنتج من (1) أن : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

$$\int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \ln x \right]_{1/2}^2 \quad (2)$$

$$= \left[-\frac{1}{2} - \ln 2 \right] - \left[-\frac{1}{1} - \ln 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} - \ln 2 + 1 = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\int_0^1 x (x^2 - 4)^3 dx = \frac{1}{2} \times \int_0^1 2x (x^2 - 4)^3 dx \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 - 4)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - 4)^4}{4} - \frac{(0 - 4)^4}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{81}{4} - \frac{256}{4} \right] = \frac{-175}{8}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x^3 + 3)^2} dx = \frac{1}{3} \times \int_{-1}^1 \frac{3x^2}{(x^3 + 3)^2} dx \quad (4)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{-1}{x^3 + 3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{-1}{4} \right) - \left(\frac{-1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}$$

$$\int_{-2}^2 e^x dx = [e^x]_{-2}^2 = e^2 - e^{-2} \quad (5)$$

$$\int_0^1 (e^{2x} - e^x + 4) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - e^x + 4x \right]_0^1 \quad (6)$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^2 - e + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - e^0 + 4(0) \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - e + 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - e + \frac{9}{2}$$

(2) استنتج أن : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$ و أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

(3) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1

(4) بين أنه من أجل $n \geq 2$: $I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$

(5) برهن بالتراجع أن : $I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} \right) + I_1$

و أن : $I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1 \right) + e$

(6) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$

الحلول

التمرين 1 :

<input checked="" type="checkbox"/> (4)	<input checked="" type="checkbox"/> (3)	<input checked="" type="checkbox"/> (2)	<input checked="" type="checkbox"/> (1)
<input checked="" type="checkbox"/> (8)	<input checked="" type="checkbox"/> (7)	<input checked="" type="checkbox"/> (6)	<input checked="" type="checkbox"/> (5)
<input checked="" type="checkbox"/> (12)	<input checked="" type="checkbox"/> (11)	<input checked="" type="checkbox"/> (10)	<input checked="" type="checkbox"/> (9)
<input checked="" type="checkbox"/> (15)	<input checked="" type="checkbox"/> (14)	<input checked="" type="checkbox"/> (13)	

التمرين 2 :

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 5) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 5(1) \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - 2(0)^2 + 5 \times 0 \right)$$

$$= \frac{1}{3} - 2 + 5 = \frac{1 - 6 + 15}{3} = \frac{10}{3}$$

$$= -\left[\ln \left(\frac{1}{2} \right) - \ln (1) \right] = -\ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2\sqrt{x+1} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 \quad (12)$$

$$\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{2e} \frac{1}{x} \times (\ln x)^1 dx \quad (13)$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^{2e} = \frac{(\ln 2e)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln 2e)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \quad (14)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 0 = 0$$

التمرين 3 :

1- كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+2}$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1)(x+2) + c(x+2) + d(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2+x-2) + cx + 2c + dx - d}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + ax^2 - 2ax + bx^2 + bx - 2b + cx + 2c + dx - d}{x^2+x-2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + (a+b)x^2 + (-2a+b+c+d)x - 2b+2c-d}{x^2+x-2}$$

$$\int_1^2 \left(e^{-x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[-e^{-x} + \frac{1}{x} \right]_1^2 \quad (7)$$

$$= \left(-e^{-2} + \frac{1}{2} \right) - \left(-e^{-1} + 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{e} - 1$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \right) dx = \left[\frac{-1}{e^x+1} \right]_0^1 \quad (8)$$

$$= -\frac{1}{e+1} - \frac{-1}{2} = \frac{-1}{e+1} + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (\sin x)^1 dx \quad (9)$$

$$= \left[\frac{\sin^2 x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin^2 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \cos 3x dx = \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\pi} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{3} \sin 3\pi - \frac{1}{3} \sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx \quad (11)$$

$$= - \left[\ln (\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= - \left[\ln \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) - \ln (\cos 0) \right]$$

2- حساب $\int_{-2}^2 f(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \frac{-5}{2} \int_{-2}^2 \frac{-1}{5-x} dx + \frac{5}{2} \int_{-2}^2 \frac{1}{5+x} dx \\ &= \left[\frac{-5}{2} \ln(5-x) + \frac{5}{2} \ln(5+x) \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{5}{2} [\ln(5+x) - \ln(5-x)]_{-2}^2 = \frac{5}{2} \left[\ln \left(\frac{5+x}{5-x} \right) \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{5}{2} \left[\ln \frac{7}{3} - \ln \frac{3}{7} \right] = \frac{5}{2} \ln \left(\frac{49}{9} \right) \end{aligned}$$

3- تبين أن : $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{2} \left[\ln \left(\frac{5+x}{5-x} \right) \right]_0^2 = \frac{5}{2} \left[\ln \frac{7}{3} - \ln 1 \right]$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{2} \ln \frac{7}{3}$$

$$2 \int_0^2 f(x) dx = 2 \times \frac{5}{2} \ln \frac{7}{3} = \frac{5}{2} \ln \left(\frac{7}{3} \right)^2$$

$$2 \int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{2} \ln \left(\frac{49}{9} \right)$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$$

ومنه :

(4) حساب المساحة :

x	$-\infty$	-5	5	$+\infty$
$25-x^2$	-	○	○	-

ومنه : $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=-1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c+d=2 \\ 2c-d=7 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a=2 \\ a+b=3 \\ -2a+b+c+d=-1 \\ -2b+2c-d=5 \end{cases}$

إذن : $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

2- تعيين الدالة الأصلية للدالة f :

$$g(x) = x^2 + x + 3 \ln |x-1| - \ln |x+2| + c ; c \in \mathbb{R}$$

3- حساب $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \left[x^2 + x + 3 \ln |x-1| - \ln |x+2| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{3}{2} - \ln \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} + 3 \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{2} + \frac{1}{4} - 3 \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{3}{2} \\ &= 1 - 3 \ln 2 - \ln 5 + \ln 2 - 3 \ln 3 + 3 \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 \\ &= 1 - \ln 5 - 2 \ln 3 \end{aligned}$$

التمرين 4 :

1- تعيين α و β بحيث : $f(x) = \frac{\alpha}{5-x} + \frac{\beta}{5+x}$

$$f(x) = \frac{\alpha(5+x) + \beta(5-x)}{(5-x)(5+x)} = \frac{(\alpha-\beta)x + 5\alpha + 5\beta}{25-x^2}$$

ومنه : $\begin{cases} \alpha=2,5 \\ \beta=2,5 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \alpha=\beta \\ 10\alpha=25 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \alpha-\beta=0 \\ 5\alpha+5\beta=25 \end{cases}$

وبالتالي : $f(x) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$

لدينا : $25 - x^2 > 0$ في المجال $[-5; 5]$ ومنه $f(x) > 0$ في المجال $[0; 2]$

ومنه المساحة A هي : $A = \int_0^2 f(x) dx = \frac{5}{2} \ln \frac{7}{3} \text{ cm}^2$

التمرين 5 :

(1) حصر الدالة f :

لدينا : $0 \leq x^2 \leq 4$ وعليه : $1 \leq 1 + x^2 \leq 5$

وبالتالي : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ إذن : $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$

2- استنتاج حصر : $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$ لدينا : $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$

ومنه : $\frac{1}{5} (2 - 0) \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 1 (2 - 0)$ إذن :

$\frac{2}{5} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2$ وبالتالي : $\frac{2}{5} \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 2$

التمرين 6 :

(1) تبين أن f زوجية : $D_f = \mathbb{R}$

من أجل كل عنصر x من \mathbb{R} : $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = e^{(-x)^2+1}$ أي $f(-x) = f(x)$ ومنه : f زوجية

(2) تعيين حصر الدالة f على $[0; 2]$

لدينا : $0 \leq x^2 \leq 4$ ومنه $0 \leq x^2 + 1 \leq 5$

وعليه : $1 \leq x^2 + 1 \leq 5$ أي أن : $e \leq e^{x^2+1} \leq e^5$

وبالتالي : $e \leq f(x) \leq e^5$

3- استنتاج حصر : $\int_0^2 f(x) dx$

لدينا : $e \leq f(x) \leq e^5$

ومنه : $e(2 - 0) \leq \int_0^2 f(x) dx \leq e^5 (2 - 0)$

إذن : $2e \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 2e^5$

حصر التكامل : $\int_{-2}^2 f(x) dx$ بما أن f زوجية فإن :

$$2e \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 2e^5 \quad \text{ولدينا} \quad \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$$

$$4e \leq 2 \int_0^2 f(x) dx \leq 4e^5 \quad \text{وعليه} :$$

$$4e \leq \int_{-2}^2 f(x) dx \leq 4e^5 \quad \text{إذن} :$$

التمرين 7 :
القيمة المتوسطة للدالة f :

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} (1 - 0) = \frac{2}{\pi}$$

إذن القيمة المتوسطة للدالة f هي $\frac{2}{\pi}$

التمرين 8 :

دراسة تغيرات f على $[e; 2e]$:

$$\text{لدينا : } f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e \quad ; \quad f(2e) = \frac{2e}{\ln 2e}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$x = e$ معناه : $f'(x) = 0$ ومنه $\ln x = 1$

$x > e$ معناه : $f'(x) < 0$ ومنه $\ln x > 1$

f / متزايدة تماماً على $[e; 2e]$

ومنه : $\int_{\pi}^{\pi} x \sin x \, dx = \pi - 1$

(2) حساب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x \, dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) \, dx$

بوضع : $f'(x) = \cos 3x$ و $g(x) = x$

نجد : $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ و $g'(x) = 1$

وعليه : $\int_0^{\pi} x \cos 3x \, dx = \left[\frac{1}{3} x \sin 3x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin 3x \, dx$

$= \left[\frac{1}{3} x \sin 3x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{9} \cos 3x \right]_0^{\pi}$

$= \left[\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x \right]_0^{\pi}$

$= \left(\frac{1}{3} \pi \sin 3\pi + \frac{1}{9} \cos 3\pi \right) - \left(\frac{1}{3} \times 0 \times \sin 0 + \frac{1}{9} \cos 0 \right)$

$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$

اذن : $\int_0^{\pi} x \cos 3x \, dx = -\frac{2}{9}$

(3) حساب $\int_0^{\ln 2} x e^x \, dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) \, dx$

بوضع : $f'(x) = e^x$ و $g(x) = x$

$f(x) = e^x$ و $g'(x) = 1$

x	e	$2e$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	e	$\frac{2e}{\ln 2e}$

استنتاج حصرا للتكامل :

لدينا : $e \leq f(x) \leq \frac{2e}{\ln 2e}$

ومنه : $e(2e - e) \leq \int_e^{2e} f(x) \, dx \leq \frac{2e}{\ln 2e} (2e - e)$

وعليه : $e^2 \leq \int_e^{2e} f(x) \, dx \leq \frac{2e^2}{\ln 2e}$

التمرين 9 :

(1) حساب $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \, dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x) \times g(x) \, dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \times g'(x) \, dx$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ فنجد

$f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = 1$ وعليه

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x \, dx$

$= [-x \cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= [-x \cos x + \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= (-\pi \cos \pi + \sin \pi) - \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$= \pi + 0 + 0 - 1 = \pi - 1$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$g(x) = x + 1 \quad \text{و} \quad f'(x) = e^{-x} \quad \text{بوضع :}$$

$$g'(x) = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = -e^{-x} \quad \text{فنجد :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1) e^{-x} dx &= [-(x+1) e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx \\ &= [-(x+1) e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 \end{aligned} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1) e^x dx &= [-(x+1) e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = [e^{-x} (-x-1-1)]_0^1 \\ &= [-(x+2) e^{-x}]_0^1 = e^{-1} (-3) - e^0 (-2) = \frac{-3}{e} + 2 \end{aligned}$$

..... : التمرين 10

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx \quad \text{حساب (1)}$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{و} \quad f'(x) = \sin x \quad \text{بوضع :}$$

$$g'(x) = 2x \quad \text{و} \quad f(x) = -\cos x \quad \text{فنجد :}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2x \cos x dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= \left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos \frac{\pi}{2} \right] - [-0^2 \cos 0] + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{حساب :}$$

$$g(x) = x \quad \text{و} \quad f'(x) = \cos x \quad \text{بوضع :}$$

$$g'(x) = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = \sin x \quad \text{فنجد :}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad \text{وعليه :}$$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t dt \quad \text{حساب (2)}$$

$$g(t) = t^2 \quad \text{و} \quad f'(x) = \sin 2t \quad \text{بوضع :}$$

$$g'(t) = 2t \quad \text{و} \quad f(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t \quad \text{فنجد :}$$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t dt = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t \right]_0^x - \int_0^x -t \cos 2t dt \quad \text{وعليه :}$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int_0^x t \cos 2t dt$$

$$\int_0^x t \cos 2t dt \quad \text{حساب :}$$

$$g(t) = t \quad \text{و} \quad f'(t) = \cos 2t \quad \text{بوضع :}$$

$$g'(t) = 1 \quad \text{و} \quad f(t) = \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{فنجد :}$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2 (\ln 2)^2 - 2 (2 \ln 2 - 1) \quad \text{وعليه :}$$

$$= 2 (\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2$$

$$= 2 [(\ln 2)^2 - 2 \ln 2 + 1] = 2 (\ln 2 - 1)^2$$

$$\int_0^\pi \sin x e^x dx \quad \text{: حساب (4)}$$

$$g(x) = \sin x \quad \text{و} \quad f'(x) = e^x \quad \text{: بوضع}$$

$$g'(x) = \cos x \quad \text{و} \quad f(x) = e^x \quad \text{: فنجد}$$

$$\int_0^\pi \sin x e^x dx = [\sin x e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x e^x dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= \sin \pi e^\pi - \sin 0 e^0 - \int_0^\pi \cos x e^x dx = - \int_0^\pi \cos x e^x dx$$

$$\int_0^\pi \cos x e^x dx \quad \text{: حساب}$$

$$g(x) = \cos x \quad \text{و} \quad f'(x) = e^x \quad \text{: بوضع}$$

$$g'(x) = -\sin x \quad \text{و} \quad f(x) = e^x \quad \text{: فنجد}$$

$$\int_0^\pi \cos x e^x dx = [e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin x e^x dx \quad \text{وعليه :}$$

$$= e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0 + \int_0^\pi \sin x e^x dx$$

$$\int_0^\pi \cos x e^x dx = -e^\pi - 1 + \int_0^\pi \sin x e^x dx \quad \text{إذن :}$$

$$\int_0^\pi \sin x e^x dx = e^\pi + 1 - \int_0^\pi \sin x e^x dx \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\int_0^\pi \sin x e^x dx + \int_0^\pi \sin x e^x dx = e^\pi + 1 \quad \text{: (4)}$$

$$\int_0^x t \cos 2t dt = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2} \sin 2t dt \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x - \left[\frac{-1}{2} t \cos 2t \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x - \left[\frac{-1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4}$$

$$\int_0^x t^2 \sin 2t dt = \frac{-1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx \quad \text{: حساب (3)}$$

$$f'(x) = 1 \quad \text{و} \quad g(x) = (\ln x)^2 \quad \text{: بوضع}$$

$$f(x) = x \quad \text{و} \quad g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \quad \text{: فنجد}$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = [x (\ln x)^2]_1^2 - \int_1^2 2 \ln x dx \quad \text{وعليه :}$$

$$= 2 (\ln 2)^2 - 2 \int_1^2 \ln x dx$$

$$\int_1^2 \ln x dx \quad \text{: حساب}$$

$$g(x) = \ln x \quad \text{و} \quad f'(x) = 1 \quad \text{: بوضع}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad f(x) = x \quad \text{: فنجد}$$

$$\int_1^2 \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [x \ln x - x]_1^2 = (2 \ln 2 - 2) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$= 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1$$

$$A = \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{\pi \times 9}{2} \text{ : وعليه}$$

$$A = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^2 \text{ : إذن}$$

$$2 \int_0^{\pi} \sin x e^x dx = e^{\pi} + 1 \text{ : ومنه}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x e^x dx = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1) \text{ : ومنه}$$

التمرين 11 :
(1) دراسة تغيرات f :

* مجموعة التعريف : $D_f = [-3 ; 3]$

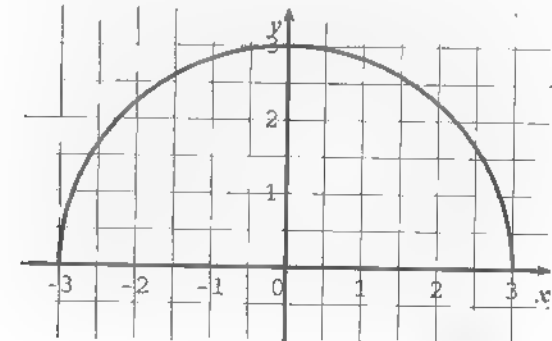
* لدينا : $f(3) = 0$ و $f(-3) = 0$

$$* \text{ المشتق : } f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

x	-3	0	3
$f'(x)$	+	0	-

ومن f متزايدة تماماً على $[-3 ; 0]$ ومتناقصة تماماً على $[0 ; 3]$

x	-3	0	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	3	0



$$(2) \text{ حساب } y^2 : y = \sqrt{9-x^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ : ومنه } \begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ : ومنه}$$

التمرين 12 :
(1) دراسة إشارة $f(x)$:

ندرس إشارة : $e^{2x} - 7e^x + 12$

بوضع $e^x = y$ نجد : $y^2 - 7y + 12$

لدينا : $\Delta = 1$ ومنه يقبل جذران : $y_1 = 3$ و $y_2 = 4$

وعليه : $y^2 - 7y + 12 = (y-3)(y-4)$

إذن : $e^{2x} - 7e^x + 12 = (e^x - 3)(e^x - 4)$

x	$+\infty$	$\ln 3$	$\ln 4$	$+\infty$
$e^x - 3$	-	0	+	+
$e^x - 4$	-	-	0	+
$(e^x - 3)(e^x - 4)$	+	0	-	+
$f(x)$	+	-	0	+

(2) حساب المساحة : A

الدالة f مستمرة و سالبة في المجال $[\ln 3 ; \ln 4]$ ومنه :

$$A = - \int_{\ln 3}^{\ln 4} f(x) dx = - \int_{\ln 3}^{\ln 4} (e^{2x} - 7e^x + 12) dx$$

$$A = - \left[\frac{1}{2} e^{2x} - 7e^x + 12x \right]_{\ln 3}^{\ln 4}$$

إذن :

$$A = - \left(\frac{1}{2} e^{2\ln 4} - 7e^{\ln 4} + 12\ln 4 \right) + \left(\frac{1}{2} e^{2\ln 3} - 7e^{\ln 3} + 12\ln 3 \right)$$

التمرين 14 :

$$\bullet D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} \times \frac{-x}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \times \frac{1}{1-x} = 0$$

$$\bullet f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2} \quad \text{اذن :}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	+		+

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين : $[0 ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$ ومتناقصة على المجال $] -\infty ; 0]$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow	$+\infty$

$$\text{بيان أن } 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ في المجال } \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$$

$$A = \left(-\frac{1}{2} e^{\ln 16} + 7 \times 4 - 12 \times 2 \ln 2 \right) + \left(\frac{1}{2} e^{\ln 9} + 7 \times 3 + 12 \ln 3 \right)$$

$$A = \frac{-1}{2} \times 16 + 28 - 24 \ln 2 + \frac{1}{2} \times 9 + 21 + 12 \ln 3$$

$$A = -8 + 28 - 24 \ln 2 + \frac{9}{2} + 21 + 12 \ln 3$$

$$A = 41 + \frac{9}{2} - 24 \ln 2 + 12 \ln 3$$

$$A = \left(\frac{82 + 9}{2} \right) - 24 \ln 2 + 12 \ln 3$$

$$A = \left[\frac{91}{2} - 24 \ln 2 + 12 \ln 3 \right] \text{ cm}^2$$

التمرين 13 :

$$\int_{-2}^5 \frac{|x|}{1+x^2} dx \quad \text{حساب التكامل}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 \frac{|x|}{1+x^2} dx &= \int_{-2}^0 \frac{|x|}{1+x^2} dx + \int_0^5 \frac{|x|}{1+x^2} dx \\ &= \int_{-2}^0 \frac{-x}{1+x^2} dx + \int_0^5 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^5 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_{-2}^0 + \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^5 \\ &= -\frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 5) + \frac{1}{2} (\ln 26 - \ln 1) \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 26 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \quad \text{طيه :}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx \quad \text{حساب (8)}$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx \quad \text{قانون التجزئة :}$$

$$g(x) = 1+x \quad \text{و} \quad f'(x) = e^{-x} \quad \text{بوضع :}$$

$$g'(x) = 1 \quad \text{و} \quad f(x) = -e^{-x} \quad \text{لنجد :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx &= \left[-(1+x) e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x} dx \\ &= \left[-(1+x) e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[-(1+x) e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[-(2+x) e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(-(2+0) e^0 \right) - \left(- \left(2 + \frac{1}{2} \right) e^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= -2 + \frac{5}{2} e^{\frac{1}{2}} = -2 + \frac{5}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

الاستنتاج :

$$x^2 \leq x^2 f(x) \leq \frac{2x^2}{\sqrt{e}} \quad \text{ومنه :} \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \quad \text{(1) لدينا :}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{e}} x^2 dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \left[\frac{2x^3}{3\sqrt{e}} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

في المجال $\left[0 ; \frac{1}{2} \right]$ الدالة f متزايدة تماماً وعليه :

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{فإن} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{بما أن :}$$

$$1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \quad \text{ومنه :} \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx \quad \text{2- التفسير الهندسي للتكامل :}$$

في المجال $\left[0 ; \frac{1}{2} \right]$ الدالة f مستمرة موجبة ومنه : التكامل يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) للدالة f والمستقيمات التي معادلاتها :

$$y=0 \quad \text{و} \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x=0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1+x+\frac{x^2}{1-x} \quad \text{3- تبين أن :} \\ 1+x+\frac{x^2}{1-x} &= \frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} \\ &= \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad \text{لدينا :} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$$

4- استنتاج أن :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1+x+\frac{x^2}{1-x} \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} (1+x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \frac{e^{-x}}{1-x} dx$$

2- حساب الحجم :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

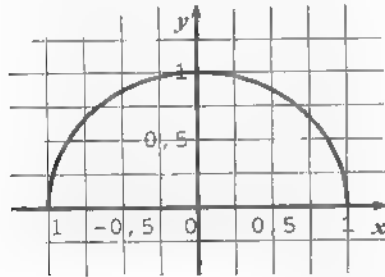
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin \pi \right] - \pi \left[\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \sin 0 \right] = \pi \left[\frac{\pi}{4} \right]$$

$$V = \frac{\pi^2}{4} \text{ cm}^3 \quad \text{إذن :}$$

التمرين 16 :
1- إنشاء البيان :



2. حساب الحجم :

$$V = \int_{-1}^1 \pi [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx$$

$$V = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$V = \pi \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \pi \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \pi \times \frac{4}{3}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3 \quad \text{إذن :}$$

التمرين 17 :

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}} \quad \text{إذن :}$$

7- استنتاج قيمة مقربة للعدد I :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx = 2 + \frac{5}{2\sqrt{e}} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}} \quad \text{و منه :}$$

$$-2 + \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq -2 + \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

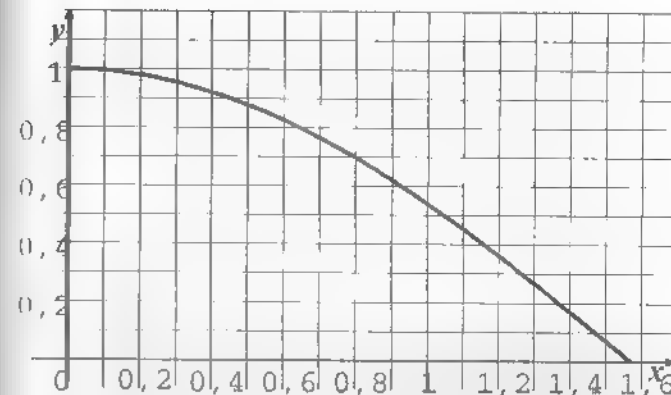
$$\frac{-48\sqrt{e} + 60 + \sqrt{e}}{24\sqrt{e}} \leq I \leq \frac{-24\sqrt{e} + 30 + 1}{12\sqrt{e}} \quad \text{وعليه :}$$

$$\frac{60 - 47\sqrt{e}}{24\sqrt{e}} \leq I \leq \frac{31 - 24\sqrt{e}}{12\sqrt{e}} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{ومنه : } -0.43 \leq I \leq -0.44$$

$$\text{وعليه : } I \approx -0.4$$

التمرين 15 :
1- إنشاء التمثيل البياني :



$$A = \int_0^1 [y - f(x)] dx = \int_0^1 [1 - f(x)] dx$$

$$A = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx = \left[x - \ln(e^x + e^{-x}) \right]_0^1$$

$$A = [1 - \ln(e + e^{-1})] - [0 - \ln 2] \quad \text{وعليه :}$$

$$A = \left[1 - \ln \left(e + \frac{1}{e} \right) + \ln 2 \right] \text{ cm}^2$$

التمرين 18 :

$$(1) \text{ تبيان أن : } 0 \leq (1-x)^n e^x \leq e$$

$$\text{لدينا : } 0 \leq x \leq 1 \text{ ومنه : } -1 \leq -x \leq 0$$

$$\text{وعليه : } 0 \leq 1-x \leq 1 \text{ أي : } 0 \leq (1-x)^n \leq 1$$

$$\text{ولدينا : } 1 \leq e^x \leq e$$

$$\text{ومنه : } 0 \leq (1-x)^n e^x \leq e$$

$$(2) \text{ استنتاج أن : } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}$$

$$\text{لدينا : } 0 \leq (1-x)^n e^x \leq e$$

$$\text{ومنه : } 0(1-0) \leq \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq e(1-0)$$

$$\text{أي : } 0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq e$$

$$\text{وعليه : } 0 \cdot \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx \leq \frac{1}{n!} e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n!} = 0 \quad \text{ولدينا : } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$$

$$\text{وعليه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

(1) حساب I_1 :

$$1-\text{ تبيان أن : } f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ومنه : } f(x) = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$$

$$\text{وعليه : } f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{وبالتالي : } f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

2- دراسة تغيرات f :

$$\bullet f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1$$

$$\bullet f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$\text{إن : } f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

وعليه : $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[0 ; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	1

3- حساب المساحة :

لدينا : $f(x) < 1$ ومنه :

$$\int_0^1 (1-x) e^x dx = -1 + n \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x) e^x dx = -\frac{1}{n!} + \frac{n}{n!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

إذن : $I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$
 البرهان بالتراجع على صحة :

$$p(n) : I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!}\right) + I_1$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} + I_1 \quad \bullet \text{ نتأكد من صحة } p(2)$$

ومنه $p(1)$ صحيحة من (4).

نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$ •

$$p(k) : I_k = -\left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} + \dots + \frac{1}{2!}\right) + I_1$$

$$p(k+1) : I_{k+1} = -\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{2!}\right) + I_1$$

$$I_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)!} + I_k \quad \text{من (4) :}$$

$$= -\frac{1}{(k+1)!} - \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} + \dots + \frac{1}{2!}\right) + I_1$$

$$= -\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{2!}\right) + I_1$$

• عليه $p(k+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 2$
 البرهان على صحة الخاصية :

$$p(n) : I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\right) + e$$

• من أجل $n = 2$:

$$I_1 = \int_0^1 (1-x) e^x dx$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx$$

بوضع : $g(x) = 1-x$ و $f'(x) = e^x$

ف نجد : $g'(x) = -1$ و $f(x) = e^x$

$$\int_0^1 (1-x) e^x dx = [(1-x) e^x]_0^1 - \int_0^1 -e^x dx \quad \text{ومنه :}$$

$$= [(1-x) e^x]_0^1 + [e^x]_0^1$$

$$= [(1-x) e^x + e^x]_0^1$$

$$I_1 = [(1-x) e^x]_0^1 = e - 2$$

$$I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$$

4- تبين أن :

$$I_n = -\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

$$\int_0^1 (1-x)^n e^x dx \quad \text{بالتجزئة نحسب :}$$

قانون التجزئة :

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx$$

بوضع : $g(x) = (1-x)^n$ و $f'(x) = e^x$

ف نجد : $g'(x) = -n(1-x)^{n-1}$ و $f(x) = e^x$

ومنه :

$$\int_0^1 (1-x) e^x dx = [(1-x)^n e^x]_0^1 + n \int_0^1 (1-x)^{n-1} e^x dx$$

10 - الاحتمالات

1 - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية.
- مصطلحات :

نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة. نسمى مجموعة النتائج الممكنة بمجموعة الإمكانات ونرمز لها بالرمز Ω .
كل جزء A من Ω يسمى حادثة.

إذا احتوت المجموعة الجزئية A من Ω على عنصر وحيد فإنها تدعى حادثة أولية الحادثة الأكيدة هي Ω والحادثة المستحيلة هي \emptyset .

إذا كانت A حادثة فإن حادتها العكسية هي \bar{A} وهي التي تحتوي على كل عناصر Ω ما عدا عناصر A .

لنكن A و B حادثتان نرمز بـ $A \cap B$ للحادثة A و B وهي التي تحتوي على كل عناصر Ω والتي تنتمي إلى A وإلى B . إذا كانت $A \cap B$ خالية أي $A \cap B = \emptyset$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلامتين.

ونرمز بالرمز $A \cup B$ للحادثة A أو B وهي التي تحتوي على عناصر A وعناصر B أيضا (قانون الاحتمال :

لكن Ω مجموعة الإمكانات المتعلقة بتجربة عشوائية :

$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ حيث $e_1; e_2; \dots; e_n$ هي إمكانات هذه التجربة وتسمى أيضا مخارج قانون الاحتمال p للتجربة العشوائية هو إرفاق بالعناصر $e_1; e_2; \dots; e_n$ أعدادا حقيقية موجبة $p_1; p_2; \dots; p_n$ تسمى احتمالات المخارج $e_1; e_2; \dots; e_n$ على الترتيب.

يكون قانون الاحتمال معرف بالجدول :

قيم Ω	e_1	e_2	...	e_n
الاحتمالات	p_1	p_2	...	p_n

ملحظة 1 :

بما أن كل عدد من الأعداد $p_1; p_2; \dots; p_n$ موجب فهو أصغر من المجموع 1 ومنه :

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ من أجل } 1 \leq i \leq n$$

ملحظة 2 :

تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانات Ω وقانون

احتمال p على Ω .

تساوي الاحتمال :

لنول عن تجربة أنها مساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال

$$I_2 = -\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e = -\left(\frac{5}{2}\right) + e = e - \frac{5}{2}$$

$$\text{ومن (4) : } I_2 = -\frac{1}{2!} + I_1 \quad \text{إذن : } I_2 = -\frac{1}{2} + e - 2 = e - \frac{5}{2}$$

ومنه (2) صحيحة.

نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : I_k = -\left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e$$

$$p(k+1) : I_{k+1} = -\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e$$

من (4) :

$$I_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)!} + I_k$$

$$= \frac{-1}{(k+1)!} - \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e$$

$$= -\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e$$

ومنه : $p(k+1)$ صحيحة

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

$$6- \text{تبيين أن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

$$\text{مما سبق : } I_n = -\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1\right) + e$$

$$\text{ولدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + e\right] = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع . فإذا كانت $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ مجموعة
الإمكانات و كانت $p_1; p_2; \dots; p_n$ احتمالات المخارج $e_1; e_2; \dots; e_n$ على الترتيب فإن :

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$$

وإذا كانت A حادثة تحتوي على m عنصرا يكون احتمالها $p(A)$ يحقق :

$$p(A) = m \cdot \frac{1}{n}$$

$$p(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ملاحظة 3 :

بما أن : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ فإن : $p(\Omega) = 1$ وعليه نضع : $p(\emptyset) = 0$.
4- خواص الاحتمالات :

لتكن Ω مجموعة الإمكانات لتجربة عشوائية نزود Ω بالاحتمال p .

- من أجل كل حادثة A فإن : $0 \leq p(A) \leq 1$

- إذا كانت A و B حادثتين غير متلامتين $(A \cap B = \emptyset)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

- إذا كانت A و B حادثتين كئيفيتين فإن :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- إذا كانت A الحادثة العكسية للحادثة A فإن : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

$$p(\emptyset) = 0 \text{ و } p(\Omega) = 1$$

- إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A \subset B)$ فإن : $p(A) \leq p(B)$

تعريف :

Ω مجموعة الإمكانات لتجربة عشوائية حيث : $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$

p احتمالا معرفا على Ω ، $p_1; p_2; \dots; p_n$ احتمالات المخارج $e_1; e_2; \dots; e_n$ على الترتيب .

- أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث : $E = e_1 \cdot p_1 + e_2 \cdot p_2 + \dots + e_n \cdot p_n$

- تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث :

$$V = (e_1 - E)^2 \cdot p_1 + (e_2 - E)^2 \cdot p_2 + \dots + (e_n - E)^2 \cdot p_n$$

- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد S حيث : $S = \sqrt{V}$

و يمكن كتابة V على الشكل : $V = e_1^2 \cdot p_1 + e_2^2 \cdot p_2 + \dots + e_n^2 \cdot p_n - E^2$

تعريف 1 :

Ω مجموعة الإمكانات المتعلقة بتجربة عشوائية . p احتمال معرف على Ω .

نسمى متغيرا عشوائيا X كل دالة عددية معرفة على Ω .

تعريف 2 :

X متغير عشوائي معرف على Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية . و لتكن I مجموعة قيم X

أي : $I = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ و ليكن p_i احتمال الحادثة :

" X يأخذ القيمة x_i " أي $(X = x_i)$ حيث لدينا : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

قانون احتمال للمتغير العشوائي X هو الدالة المعرفة على I و التي

ترفق بكل قيمة x_i من I العدد $p(X = x_i)$

تعريف 3 :

الأمل لرياضياتي للمتغير X هو العدد $E(X)$

حيث : $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

التباين للمتغير X هو العدد $V(X)$ حيث

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n$$

الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد $\sigma(X)$ حيث : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

و يمكن كتابة : $V(X) = e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 + \dots + e_n^2 p_n - (E(X))^2$

حيث : $p_i = p(X = x_i)$ من أجل $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

II - العد :

1 المبدأ الأساسي للعد :

إذا كان هناك إجراء معين يتم به : n_1 طريقة و إجراء ثان يتم به n_2 طريقة ، ... ، ثم إجراء من

رتبة k يتم به n_k طريقة فإن هذه الإجراءات تتم على التتابع به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طريقة

القوائم :

تعريف :

n و p عدنان طبيعيين غير معدومين E مجموعة ذات n عنصرا .

كل عنصر من الشكل (e_1, e_2, \dots, e_n) يسمى قائمة ذات n عنصرا من المجموعة E

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad \text{أي} \quad :$$

ملاحظة :

$$\text{رمز لعدد التوفيقات بالرمز : } C_n^p \text{ أو } \binom{n}{p}$$

خواص C_n^p :

لدينا الخواص التالية للعدد C_n^p :

$$C_n^p = C_n^{n-p} \quad ; \quad C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^1 = n \quad ; \quad C_n^0 = 1$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

المثلث العددي: ويعتمد في حساب C_n^p على الخواص الخمسة السابقة :

$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	0	1	2	3	...	p-1	p	...	n-1	n
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0						0
2	1	2	1	0						0
3	1	3	3	1	0					0
...										
p-1	1					1	0			0
p	1						1			0
...										
n-1	1					C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		1	0
n	1						C_n^p			1

دستور ثنائي الحد: إذا كان a و b عدداً طبيعيين و n عدد طبيعي غير معدوم فإن:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$

III - الاحتمالات الشرطية :

الأحداث المستقلة :

مهيد :

لنن Ω مجموعة الإمكانات المتعلقة بتجربة عشوائية .

p احتمال معرف على Ω و A و B حادثان حيث : $p(A) \neq 0$

حيث : a_1, a_2, \dots, a_p هي عناصر E وهي ليست جميعها مختلفة .

عدد القوائم :

عدد القوائم ذات p عنصراً من المجموعة E ذات n عنصراً هو n^p .

3 - الترتيبات :

تعريف :

p و n عدداً طبيعيين حيث : $p \leq n$

نسمى ترتيبه ذات p عنصراً من مجموعة ذات n عنصراً كل قائمة ذات p عنصراً متميزة

مثنى مثنى .

عدد الترتيبات :

لتكن الترتيبية (a_1, a_2, \dots, a_p) من E

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

4 - التبادلات :

تعريف :

n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمى تبديلة المجموعة E ذات n عنصراً كل ترتيبية ذات n عنصراً من E .

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1)$$

$$\text{إذن : } A_n^n = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$$

الرمز عاملي : العدد $n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ يرمز له بالرمز $n!$ ونكتب

$$n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

الرمز $n!$ يقرأ : n عاملي .

$$\text{اصطلاحاً : } 1! = 1 \quad \text{و} \quad 0! = 1 \quad \text{ومنه : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{و} \quad A_n^n = n!$$

تعريف :

p و n عدداً طبيعيين حيث : $p \leq n$. E مجموعة ذات n عنصراً .

نسمى توفيق ذات p عنصراً من E كل جزء من E يشمل p عنصراً من E .

عدد التوفيقات :

$$\text{يعطي عدد التوفيقات ذات } p \text{ عنصراً من } E \text{ بالعلاقة : } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

تعريف 1 :

نسمي احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة العدد $p_A(B)$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{و هو معرف بالعبرة :}$$

- من التعريف لدينا : $p_A(\Omega) = 1$

- إذا كانت B_1, B_2 حادثتان غير متلاصقتين فإن :

$$p_A(B_1 \cup B_2) = p_A(B_1) + p_A(B_2)$$

$$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B)$$

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا وفقط إذا كانت :

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad \text{أي : } p_A(B) = p(B)$$

مبرهنة :

إذا كانت A و B حادثتين مستقلتين فإن \bar{B} و A مستقلتين .

IV - دستور الاحتمالات الكلية :

Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية . P احتمال معرف على Ω .
تعريف :

نقول عن الحوادث A_1, A_2, \dots, A_n أنها تجزئة للمجموعة Ω إذا وفقط إذا كانت

1- كل من هذه الحوادث غير مستحيلة .

2- كل حادثتين من هذه الحوادث غير متلاصقتين .

3- اتحاد هذه الحوادث يساوي Ω .

مبرهنة : (دستور الاحتمالات الكلية)

Ω مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية .

P احتمال معرف على Ω . (A_1, A_2, \dots, A_n) تجزئة للمجموعة Ω .

إذا كانت A حادثة من Ω فإن :

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \dots + P(A \cap A_n)$$

دستور الاحتمالات الكلية .

V - قوانين الاحتمالات المنقطعة :

1 - قانون التوزيع المنتظم :

ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه : x_1, x_2, \dots, x_n وليكن p_X قانون الاحتمال

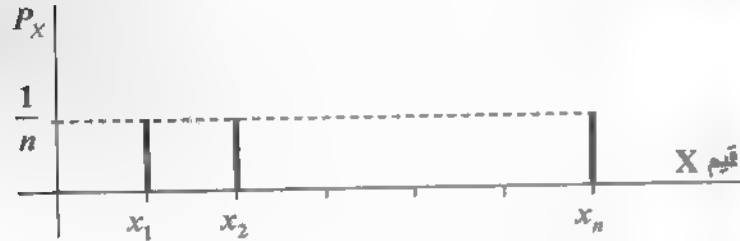
المعرف على مجموعة قيم المتغير العشوائي كما يلي :

$$p_X(x_1) = p_X(x_2) = \dots = p_X(x_n) = \frac{1}{n}$$

هذا القانون يسمى قانون التوزيع المنتظم و نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون توزيع منتظم . و هو موضح في الجدول الآتي :

قيم X	x_1	x_2	\dots	x_n
الاحتمال p_X	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	\dots	$\frac{1}{n}$

و يكون تمثيله كما يلي :



2 - قانون برنولي :

تعريف :

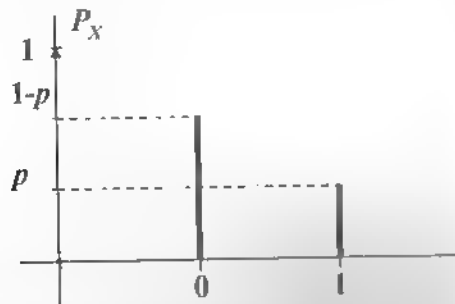
p عدد حقيقي حيث : $0 < p < 1$.

كل تجربة لها مخرجين فقط احتمالهما p و $1 - p$ على الترتيب تسمى تجربة برنولي ذات الوسيط p .

و المتغير العشوائي X في هذه التجربة يأخذ قيمة 1 في حالة نجاح التجربة و القيمة 0 في حالة رسوبها و نسميه المتغير العشوائي ذو الوسيط p لبرنولي و القانون p_X للمتغير العشوائي X يسمى قانون برنولي ذو الوسيط p و يعرف كما يلي :

قيم X	1	0
p_X	p	$1 - p$

و يكون تمثيله كما يلي :



مبرهنة :

$i \in \{1, \dots, k\}$ هو مجموع مربعات المسافة بين التواترات $(f_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ و الاحتمالات :

$$(p_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$$

$$d_{obs}^2 = (f_1 - p_1)^2 + (f_2 - p_2)^2 + \dots + (f_k - p_k)^2$$

ملاحظة : المؤشر d_{obs}^2 يستعمل في حالة كون النموذج الاحتمالي متقطع ومتساوي الاحتمالات
2- عتبة رفض نموذج احتمالي :

قبل النموذج P إذا كان d_{obs}^2 أصغر بقدر كاف . أي إذا كان أصغر من أو يساوي عتبة محددة و هي عبارة عن عدد يعطى أو يعين و يرفض النموذج في الحالة المعاكسة .
و عادة تعين العتبة باستعمال المحاكاة كما يلي :

محاكي السلسلة الإحصائية المشاهدة ذات المقياس n باستعمال النموذج p نحسب بعد ذلك المؤشر d^2 باستعمال السلسلة الجديدة ، لكن هذه القيمة تتأثر بتذبذب العينات أي أنه لو نقوم بمحاكاة جديدة نجد قيمة أخرى للمؤشر d^2 وهذا يعني أن قيم هذا المؤشر تتغير بتغير السلسلة ، لهذا نقوم عمليا بتكرار المحاكاة عدد كبير من المرات و ليكن N و نحسب d^2 من أجل كل سلسلة .

نحصل من الخطوات السابقة على سلسلة من القيم d^2 مقاسها N نلخص هذه الأخيرة بالعشيرات .

لنختار كعتبة L العشير التاسع D_9 و منه ينتج :

إذا كان $d_{obs}^2 \leq L$ فإن النموذج p مقبول .

إذا كان $d_{obs}^2 > L$ فإن النموذج p مرفوض .

ملاحظة :

أول رفض نموذج احتمالي p و فق القاعدة السابقة بحمل مجازفة بالخطأ ذلك أننا قررنا القبول بهذا النموذج إذا كانت 90% من قيم d^2 أصغر أو تساوي العدد L و 10% من قيم d^2 أكبر من L لهذا نقول عند رفض النموذج أننا رفضناه بمجازفة بالخطأ قدرها 10%
VI قوانين الاحتمالات المستمرة :

تعريف :

أول متغير عشوائي ما لا نهاية من القيم الحقيقية غير القابلة للعد، فهذا يعني أنه لا يمكن «مهر» عنه بواسطة أعداد طبيعية كأدلة ، كما هو الحال في المتغير العشوائي المتقطع لذلك نسمي هذا النوع من المتغيرات العشوائية "متغير عشوائي مستمر"

ليكن X المتغير العشوائي ذو الوسيط p لبرنولي .

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$V(X) = p(1 - p)^2 + (1 - p)(0 - p)^2 = p(1 - p)$$

3 - قانون ثنائي الحد :

تكرر تجربة برنولي ذات الوسيط p ، n مرة ($n \geq 1$) في نفس الظروف المستقلة عن بعضها .

يعرف قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد النجاحات خلال n تجربة :

$$p_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

من أجل : $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

- الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p تعطي على الترتيب كما يلي : $E(X) = np$ و

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ و } V(X) = np(1 - p)$$

- التلاؤم مع قانون احتمال متقطع :

1 - قياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي

لتكن السلسلة الإحصائية $(x_i, n_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ ذات المقياس n .

p نموذج احتمالي قابل للتعبير عنها .

لقياس التلاؤم بين النموذج p و هذه السلسلة المشاهدة ، نقارن بين

التواترات f_i : $f_i = \frac{n_i}{n}$ من أجل $i \in \{1, \dots, k\}$ مع الاحتمالات p_i الذي

يعطيها النموذج p للقيمة x_i

تعريف :

المؤشر d_{obs}^2 الذي يستعمل لقياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة $(x_i, n_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ و

نموذج احتمالي متقطع و متساوي الاحتمالات حيث : $p_i = \frac{1}{k}$ من أجل

الدالة " كثافة الاحتمال " :

تعريف :

نسمي دالة كثافة احتمال كل دالة f معرفة على المجال $[\alpha ; \beta]$ وتحقق الشروط الآتية

(1) f مستمرة على المجال $[\alpha ; \beta]$

(2) $f(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[\alpha ; \beta]$

(3) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$ (أي مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل و منحني الدالة

f و المستقيمين الذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = \beta$ تساوي 1) .

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha ; +\infty[$

مثلا فإن الشرط المتعلق بالمساحة يكتب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^x f(t) dt = 1$

تعريف :

ليكن X متغيراً عشوائياً مستمراً يأخذ قيمة في المجال I من \mathbb{R} والدالة f كثافة احتمال معرفة على I . نقول إن قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X يقبل f كثافة احتمال له إذا تحقق من أجل كل مجال $[a ; b]$ من \mathbb{R} ومحتوى في I :

$$p_X([a ; b]) = \int_a^b f(x) dx$$

3 - القانون المنتظم على $[0 ; 1]$:

تعريف :

لتكن f دالة ثابتة معرفة على المجال $[0 ; 1]$ وتأخذ القيمة 1 على هذا المجال . نسمي قانون الاحتمال الذي يقبل f كدالة كثافة احتمال ، القانون المنتظم على المجال $[0 ; 1]$.

4 - الأمل الرياضي ، التباين ، والانحراف المعياري :

تعريف :

X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال يقبل f دالة كثافة له معرفة على المجال

$[\alpha ; \beta]$ من \mathbb{R} .

$$V(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - E(X))^2 f(x) dx , E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

ملاحظة : إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha ; +\infty[$ مثلاً فإن :

$$V(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^x (t - E(X))^2 f(t) dt \text{ و } E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^x tf(t) dt$$

وفي حالة عدم وجود النهايات أو كانت غير منتهية فإن الأمل الرياضي غير موجود و عليه فالتباين غير موجود .

و لتسهيل حساب التباين لدينا :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2$$

5 - القانون الأسّي :

خاصية : الدالة f المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

حيث : λ عدد حقيقي موجب تماماً ، هي دالة كثافة احتمال

تعريف :

ليكن λ عدد حقيقي موجب تماماً .

نسمي قانون الاحتمال الذي يقبل الدالة f دالة كثافة له حيث f معرفة على المجال

$[0 ; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ، القانون الأسّي ذو الوسيط λ .

التمارين

التمرين 1 :

هناك كيس على 40 كرية مرقمة من 1 إلى 30 . سحب من الكيس كرية واحدة و تسجل رقمها .

1 - عين المجموعة الشاملة Ω

2 - عين الحوادث التالية : A : "الحصول على رقم مضاعف للعدد 8"

3 - "الحصول على رقم مضاعف للعدد 6"

4 - "الحصول على رقم أولي"

5 - "الحصول على رقم فردي"

6 - عين الحوادث التالية :

$$\overline{C \cap D}, C \cap D, \bar{C} \cap \bar{D}, \bar{D} \cap \bar{C}, A \cap B$$

التمرين 2 :
زهرة نرد مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6. نرسم الزهرة نحو الأعلى مرة واحدة ونراقب الوجه العلوي الذي يظهر عند السقوط. احتمالات الأوجه الستة $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$

تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب إذا علمت أن $p_3 = \frac{1}{7}$

- (1) احسب كل من $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$
- (2) احسب احتمال ظهور رقم أولي. (3) احسب احتمال ظهور رقم أكبر من 3.

التمرين 3 :
نرمز لوجهي قطعة نقود متوازنة بالرمزين F للوجه p للظهر.

- نرمي هذه القطعة أربع مرات متتالية.
- 1- أنشئ مخططاً يوضح كل الحالات.
- 2- احسب احتمال الحادثة B المعرفة بظهور ظهري و وجهين في أي ترتيب.
- 3- احسب احتمال الحادثة C المعرفة بظهور وجه واحد في أي ترتيب

التمرين 4 :
يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب من الكيس كرتين على التوالي بحيث بعد كل سحبة لكرته نعيدها إلى الكيس قبل السحب الموالي.

- 1- أنشئ مخططاً يبين كل الحالات.
- 2- احسب الاحتمال لأن تكون الكرية الثانية تحمل الرقم 2.

التمرين 5 :
يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس بعد كل سحبة.

- 1- أنشئ مخططاً يبين كل الحالات.
- 2- أحسب الاحتمال لأن تكون الكرية الثانية تحمل الرقم 2

التمرين 6 :
نعتبر المجموعة الشاملة في تجربة عشوائية $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ونعرف قانون الاحتمال على Ω في الجدول الآتي :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	α	$\frac{5}{30}$	$\frac{10}{30}$

- 1- عين العدد الحقيقي α
- 2- احسب الأمل الرياضي لهذا القانون
- 3- احسب التباين لهذا القانون.
- 4- احسب الانحراف المعياري لهذا القانون

التمرين 7 :
زهرة نرد غير مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6. نقذف القطعة نحو الأعلى ونراقب الوجه العلوي يظهر عند سقوطها. نفرض أن ظهور رقم أولي يعطي ربح 20 نقطة و أن ظهور الرقم

6 يعطي ربح 10 نقط و أن ظهور أي وجه آخر يعطي خسارة 5 نقط. ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم النقاط.
عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
عين الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

التمرين 8 :
(أ) عين الأعداد الطبيعية n بحيث :

$$C_{100}^2 > 2C_{100-n}^2 \quad (2) \quad C_n^1 + C_n^2 = 10 \quad (1)$$

$$\begin{cases} C_{x+y}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases} \quad (ب) \text{ عين كل الثنائيات } (x, y) \text{ من } \mathbb{N}^2 \text{ بحيث :}$$

التمرين 9 :
هل في \mathbb{R} المعادلة :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p = 0$$

التمرين 10 :
برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)\dots(4n-1) = \frac{(4n)! \cdot n!}{2^n [(2n)!]^2}$$

التمرين 11 :
(أ) برهن أن :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$p \cdot C_{n+1}^p = (n+1) \cdot C_n^{p-1}$$

(ب) احسب المجموع :

$$1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{p+1} C_n^p + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

التمرين 12 :
(أ) في نشر : $(5x+1)^{100}$ ماهو معامل الحد x^{90} .

التمرين 13 :
(أ) في نشر : $(x+2y)^{50}$ ماهو معامل الحد $x^{30} \cdot y^{20}$.

$$(ب) \text{ ماهي رتبة الحد } x^{40} \cdot y^{10} \text{ في نشر } (x+2y)^{50}$$

التمرين 14 :
الاعداد $1, 2, 3, 4, \dots, 9$

- (أ) كم عددا مكونا من 4 أرقام يمكن تشكيله من هذه الأعداد
- (ب) كم عددا مكونا من 10 أرقام يمكن تشكيله من هذه الأعداد
- (أ) كم عددا مكونا من 4 أرقام (متمايزة متثنى متثنى) يمكن تشكيله من هذه الأعداد
- (ب) كم عددا مكونا من 9 أرقام (متمايزة متثنى متثنى) يمكن تشكيله من هذه الأعداد

- (5) كم عددا مكونا من 10 أرقام (متمايزة مثنى مثنى) يمكن تشكيله من هذه الأعداد
(6) كم مجموعة جزئية يمكن تشكيلها من هذه الأعداد بحيث تشمل كل واحدة منها على 4 عناصر.
(7) كم مجموعة جزئية ذات 10 عناصر يمكن تشكيلها من هذه الأعداد

التمرين 15 :

كم عددا يمكن تشكيله باستخدام الأرقام : 0, 1, 2, ..., 9
إذا كانت هذه الأعداد مكونة من :

- (1) 4 أرقام . 4 أرقام متمايزة مثنى مثنى .
(3) 4 أرقام و مضاعفة لـ 4, 5 . 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية .

التمرين 16 :

- يحتوي كيس على 20 كرة منها 6 بيضاء و 10 حمراء و 4 خضراء. نسحب من الكيس 3 كرات
في آن واحد و بلا اختيار ونفرض أن كل السحبات متساوية الاحتمال احسب احتمال سحب :
(1) 3 كرات من نفس اللون . (2) 3 كرات مختلفة الألوان .
(3) 3 كرات بيضاء . (4) 3 كرات غير حمراء .
(5) كرة حمراء على الأقل . (6) كرتين حمراوين على الأكثر .
(7) كرة بيضاء واحدة .

التمرين 17 :

- يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 إلى 20 نسحب بلا اختيار كرة واحدة من الكيس .
ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال . p احتمال معرف على التجربة
لتكن A الحادثة : " رقم الكرة المسحوبة هو عدد أولي"
ولتكن B الحادثة : " رقم الكرة المسحوبة من مضاعفات 3"
احسب الاحتمالات التالية .

- (1) $p(A)$ (2) $p(B)$ (3) $p_B(A)$ (4) $p_A(B)$

التمرين 18 :

- يحتوي كيس على 15 قريضة مرقمة من 1 إلى 15. نسحب بلا اختيار في آن واحد قريصتين.
1- احسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 15.
2- احسب احتمال سحب قريصتين الفرق بينهما 5.
3- احسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 15 علما أن فرقهما 5.
4- هل الحادثتين A و B مستقلتين ؟

التمرين 19 :

- في تجربة عشوائية A و B حادثتان مستقلتان حيث : $p(A) = 0,6$ و $p(B) = 0,1$
احسب احتمال كل من الحوادث التالية :

$$(1) A \cap B \quad (2) A \cup B \quad (3) A \cup \bar{B}$$

$$(4) \bar{A} \cup B \quad (5) \bar{A} \cap \bar{B} \quad (6) \bar{A} \cup \bar{B}$$

التمرين 20 :

- ملونتين بلونيين مختلفين أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذين النردين نحو الأعلى و نسجل الرقمين الذان يظهران على الوجهين العلويين عند السقوط. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرقى بنتيجة كل رمي:
- العدد 0 إذا كان الرقمان فرديين . - العدد الأكبر المحصل عليه إذا كان الرقمان زوجيين .

- العدد الزوجي المحصل عليه إذا كان أحد الرقمين زوجي و الآخر فردي .

- (1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X . (2) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

- (3) احسب التباين $V(X)$. (4) احسب الانحراف المعياري .

التمرين 21 :

- في مصنع لإنتاج للحواشيب هناك ثلاثة سلاسل للتركيب هي C_1 و C_2 و C_3 حيث تنتج على الترتيب 50 % و 40 % و 10 % من الإنتاج الكلي للمصنع . احتمال أن يكون الحاسوب المركب صالح للاستعمال في كل من السلاسل C_1 و C_2 و C_3 هو 0,9 و 0,8 و 0,7
على الترتيب ماهو احتمال أن يكون الحاسوب المنتج في المصنع صالح للاستعمال .

التمرين 22 :

- يحتوي وعاء على 100 كرية مرقمة من 1 إلى 100 .
أحد اللاعبين يسحب كرة واحدة من الوعاء و يربح كلما تحصل على الرقم 10
(1) بين أنها تجربة لبرنولي . (2) احسب احتمال كل من الربح و الخسارة .
(3) ليكن X المتغير العشوائي لبرنولي ، ماهو وسيطها
احسب $E(x)$, $V(x)$, $\sigma(x)$.

التمرين 23 :

- لدينا قطعة نقود متوازنة حيث نرمز للوجه بالرمز F و للظهر بالرمز p.
أحد اللاعبين يقذف هذه القطعة 10 مرات متتالية حيث يكون رابحا في حالة ظهور F بـ 0,5 DA
وليكن X المتغير العشوائي الذي يعد عدد النجاحات خلال 10 تجارب .

- (1) ماهو احتمال أن يربح هذا اللاعب DA 3 . (2) مثل بيانيا قانون المتغير العشوائي

التمرين 24 :

- يحتوي وعاء على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء لا نفرق بينها عند اللمس
1- نسحب من الكيس 5 كرات على التوالي ودون إعادة
(أ) احسب احتمال سحب 4 كرات سوداء و كرة بيضاء بهذا الترتيب
(ب) ما احتمال سحب كرة بيضاء واحدة خلال السحبات الأربعة .
2- نسحب الآن من الكيس 5 كرات على التوالي ومع الإعادة .
أجب على السؤالين (أ) و (ب) في السؤال ① .

التمرين 25 :

- يموي وعاء على 4 كرات خضراء و 6 كرات حمراء . نسحب من الكيس n كرية على التوالي
مع الإعادة $(n \in \mathbb{N}^*)$ نسمي p_n احتمال الحصول على كرة حمراء في اخر سحب من هذه
السحبات (n سحب) .

- أحسب p_1 , p_2 , p_3 ثم استنتج p_n .

- أحسب المجموع : $S_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين 26 :

- أمر دراسة إحصائية حول منتج تجاري A تبين أن احتمال أن يختار هذا المنتج من طرف
شخص مختار عشوائيا من عينة لـ 20 شخصا هو 0,3

ليكن X عدد الأشخاص الذين يختارون هذا المنتج من بين العينة التي تم استجوابها من أجل $k \in \{0; 1; 2; \dots; 20\}$.

(1) اكتب قانون الاحتمال $p_k = p(x = k)$ بدلالة k .

(2) ما هو احتمال أن يختار 4 أشخاص من هذه العينة هذا المنتج.

التمرين 27 : ما هو احتمال الحصول على 3 ذكور في 5 ولادات علما أن احتمال الحصول على ذكر يساوي احتمال الحصول على بنت.

التمرين 28 : أجريت دراسة إحصائية في 200 قاعة سينما اختبرت عشوائيا حول إقبال الزبائن على هذه القاعات وهل الإقبال يتغير مع الشهور خلال سنة معينة فكانت النسب المئوية للإقبال كما هو مبين الجدول الآتي :

الشهور	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
النسب المئوية	9	10	7,5	7,5	7	6	6	5	8	10,5	10,5	13

1- ما هو قانون الاحتمال p الذي تقترحه لنمذجة الفرضية :

"الإقبال على قاعات السينما مستقل عن أشهر السنة"

2- ما هي الطريقة التي تقترحها المحاكاة سلسلة وفق القانون p .

3- لقياس تلازم النموذج الاحتمالي p وسلسلة تواترات الإقبال نختار معيار قياس

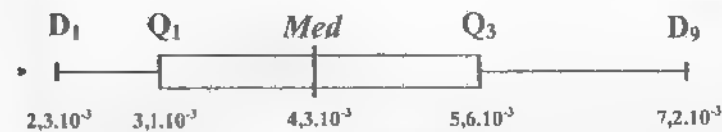
$$d^2 = \sum_{i=1}^{i=12} (f_i - p_i)^2 \text{ مع } i \in \{1; 2; \dots; 12\}$$

و f_i هي التواترات المشاهدة عندما يتغير i .

p_i هي الاحتمالات المعطاة في النموذج المفترض أنه يصف السلسلة المشاهدة

عندما يتغير i . احسب d^2 .

4- قمنا بمحاكاة التجربة في 500 سلسلة حيث كل سلسلة ذات 200 قيمة تتبع القانون p وإليك التمثيل بعلبة لقيم d_2 في 500 سلسلة.



هل النموذج المختار مقبول بمجازفة قدرها 10 %.

التمرين 29 :

إن الانشطار النووي الإشعاعي مقدرا بالسنوات مرفق بتجربة عشوائية يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ ($\lambda > 0$). في دراسة تمت على الأنوية تبين أن مدة الحياة لـ 5 % منها أصغر أو تساوي 100 سنة.

1- احسب الوسيط λ للقانون الأسي.

2- احسب احتمال أن يتم انشطار نواة في أقل من 150 سنة.

3- احسب احتمال أن يتم انشطار نواة على الأقل في 150 سنة.

4- احسب المدة المتوسطة لانشطار النواة.

التمرين 30 :

ليكن X متغير عشوائي يتبع قانون أسي وسيطه λ ($\lambda > 0$).

(1) ليكن x عدد حقيقي موجب . احسب بالتجزئة : $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$

ثم : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$. استنتج الأمل الرياضي $E(x)$.

(2) ليكن λ عدد حقيقي موجب . احسب بالتجزئة مرتين : $\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$

احسب : $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$. استنتج التباين : $V(x)$

الحلول

التمرين 1 :

1- المجموعة الشاملة : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 29, 30\}$

2- تعيين الحوادث : $A = \{8, 16, 24\}$; $B = \{6, 12, 18, 24, 30\}$

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$

$A \cap B = \{24\}$ 3- تعيين الحوادث :

$\bar{C} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22,$

$24, 25, 26, 27, 28, 30\}$

$\bar{D} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

$C \cap \bar{D} = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,$

$22, 24, 26, 28, 30\}$

$C \cap D = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

أي احتمال ظهور الحادثة : $A = \{2, 3, 5\}$

$$p(A) = \frac{10}{21} \quad \text{إذن} \quad p(A) = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{2}{21} + \frac{1}{7} + \frac{5}{21}$$

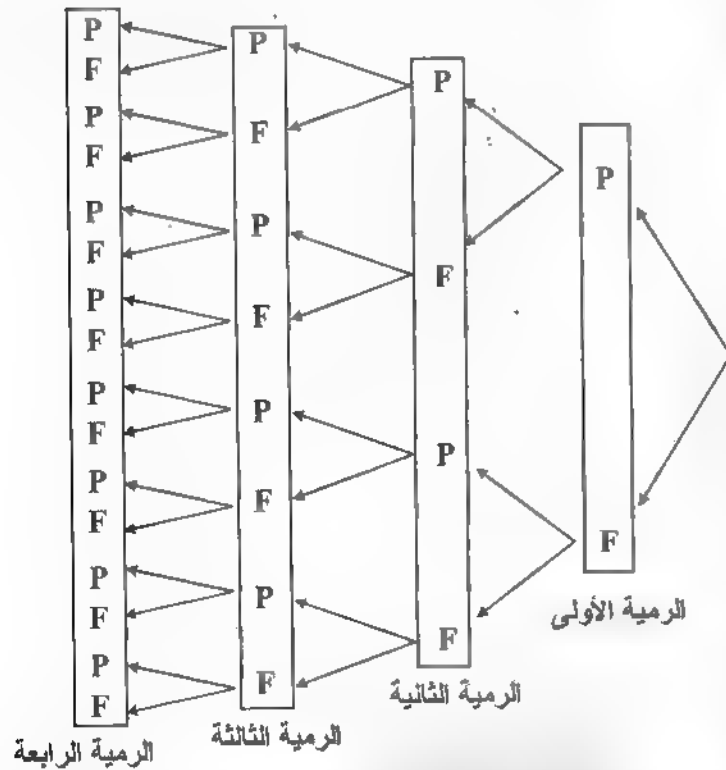
3- احتمال ظهور رقم أكبر من 3 :

أي احتمال ظهور الحادثة : $B = \{4, 5\}$

$$p(B) = p_4 + p_5 = \frac{4}{12} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21}$$

$$p(B) = \frac{3}{7} \quad \text{ومنه الاحتمال :}$$

التمرين 3 :
1- المخطط :



2- الاحتمال :

$$p(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \quad \text{احتمال الحادثة B هو :}$$

$$\overline{C \cap D} = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$$

التمرين 2 :
1- حساب كل من p_6, p_5, p_4, p_2, p_1

نفرض r أساس المتتالية الحسابية .

$$p_1 = \frac{1}{7} - 2r \quad \text{أي} \quad p_1 = p_3 - 2r \quad \text{ومنه} \quad p_3 = p_1 + 2r$$

$$p_2 = \frac{1}{7} - r \quad \text{أي} \quad p_2 = p_3 - r \quad \text{ومنه} \quad p_3 = p_2 + r$$

$$p_4 = \frac{1}{7} + 2r \quad \text{ومنه} \quad p_4 = p_3 + r$$

$$p_5 = \frac{1}{7} + 2r \quad \text{ومنه} \quad p_5 = p_3 + 2r$$

$$p_6 = \frac{1}{7} + 3r \quad \text{ومنه} \quad p_6 = p_3 + 3r$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\frac{1}{7} - 2r + \frac{1}{7} - r + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + r + \frac{1}{7} + 2r + \frac{1}{7} + 3r = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$r = \frac{1}{21} \quad \text{إذن} \quad 3r = \frac{1}{7} \quad \text{وعليه :} \quad \frac{6}{7} + 3r = 1$$

$$p_1 = \frac{1}{21} \quad \text{ومنه :} \quad p_1 = \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{21}$$

$$p_2 = \frac{2}{21} \quad \text{ومنه :} \quad p_2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{21}$$

$$p_4 = \frac{4}{21} \quad \text{ومنه :} \quad p_4 = \frac{1}{7} + \frac{1}{21}$$

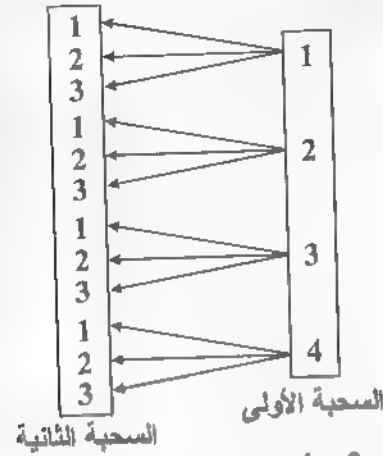
$$p_5 = \frac{5}{21} \quad \text{ومنه :} \quad p_5 = \frac{1}{7} + \frac{2}{21}$$

$$p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \quad \text{أي} \quad p_6 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \quad \text{ومنه :} \quad p_6 = \frac{1}{7} + \frac{3}{21}$$

2- احتمال ظهور رقم أولي :

التمرين 5 :

1- المخطط :



عدد الحالات الممكنة هو : $4 \times 3 = 12$

عدد الحالات الملائمة : $4 \times 1 = 4$ إذن الاحتمال هو : $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

التمرين 6 :

1 تعيين α : لدينا : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

$$\frac{7}{30} + \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \alpha + \frac{5}{30} + \frac{10}{30} = 1$$

$$\frac{27}{30} + \alpha = 1 \quad \text{ومنه} \quad \alpha = 1 - \frac{27}{30}$$

$$\alpha = \frac{3}{30} \quad \text{أي} \quad \alpha = \frac{1}{10}$$

الأمثلة الرياضية :

$$E = 1 \times \frac{7}{30} + 2 \times \frac{1}{30} + 3 \times \frac{4}{30} + 4 \times \frac{3}{30} + 5 \times \frac{5}{30} + 6 \times \frac{10}{30}$$

$$E = \frac{118}{30} \approx 3,93$$

الأمثلة :

$$V = (1)^2 \times \frac{7}{30} + (2)^2 \times \frac{1}{30} + (3)^2 \times \frac{4}{15} + (4)^2 \times \frac{3}{30} + (5)^2 \times \frac{5}{30} + (6)^2 \times \frac{10}{30} - (3,93)^2$$

عدد الحالات الممكنة هو : 16 .

عدد الحالات الملائمة هو : 6

وهي : FPPF , PFFP , PFPP , PPFF , FFPP , FPPF

$$p(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad \text{وعليه}$$

$$p(C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} : \text{3- احتمال الحادثة C}$$

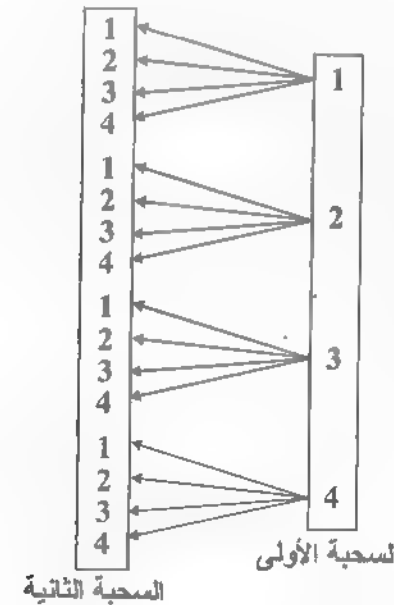
عدد الحالات الممكنة هو : 16

عدد الحالات الملائمة هو : 4 وهي : PFPP , PPFP , PPPF , FPPP

$$p(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

التمرين 4 :

1- المخطط :



2- حساب الاحتمال :

عدد الحالات الممكنة هو : $4 \times 4 = 16$

عدد الحالات الملائمة : $4 \times 1 = 4$ إذن الاحتمال هو : $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}$

• من أجل $n \geq 2$ لدينا : $n + \frac{n!}{(n-2)! 2!} = 10$

وعليه : $n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = 10$ ومنه : $n + \frac{n(n-1)}{2} = 10$

وبالتالي : $\frac{2n + n^2 - n}{2} = 10$ أي : $n^2 + n - 20 = 0$

$\Delta = 81$ ومنه : $n_1 = -5$ (مرفوض) ، $n_2 = 4$ وعليه : $n = 4$

(2) تعيين n بحيث : $C_{1000}^2 > 2 C_{1000-n}^2$

• من أجل : $100 - n < 2$ أي $n > 998$ لدينا : $C_{1000}^2 > 2 \times 0$ أي $C_{1000}^2 > 0$ وهي محققة.

إذن كل الأعداد الطبيعية n حيث $n > 998$ تحقق المتراجحة
• من أجل $100 - n \geq 2$ أي $n \leq 998$ لدينا :

$$\frac{1000!}{(1000-2)! \cdot 2!} > 2 \frac{(1000-n)!}{(1000-n-2)! \cdot 2!}$$

ومنه : $\frac{1000!}{998! \cdot 2!} > 2 \frac{(1000-n)!}{(1000-n-2)! \cdot 2!}$

$$\frac{(1000)(999)(998)!}{998! \cdot 2} > \frac{(1000-n)(1000-n-1)(1000-n-2)!}{(1000-n-2)!}$$

$$\frac{(1000)(999)}{2} > (1000-n)(999-n)$$

$$500 \cdot 999 > 999000 - 1000n - 999n + n^2$$

$$-n^2 + 1999n - 999000 + 495500 > 0$$

$$-n^2 + 1999n - 499500 > 0$$

$\Delta = 1998001$ ومنه $\Delta = (1999)^2 - 4(-1)(-499500)$

$$n_2 = \frac{-1999 - \sqrt{\Delta}}{-2} , n_1 = \frac{-1999 + \sqrt{\Delta}}{-2}$$

$$n_2 \approx 1706,25 \quad n_1 \approx -292,7$$

n	$-\infty$	n_1	n_2	$+\infty$
$-n^2 + 1999n - 499500$	-	○	○	-

$$V = \frac{7+4+9 \times 4 + 16 \times 3 + 25 \times 5 + 36 \times 10}{30} - \left(\frac{118}{30} \right)^2$$

$$V = \frac{580}{30} - \frac{(118)^2}{(30)^2} = \frac{580 \times 30 - (118)^2}{(30)^2} = \frac{3476}{900} \approx 3,86$$

4- الانحراف المعياري : لدينا : $\sigma = \sqrt{V} \approx 1,96$ ومنه : $\sigma = \sqrt{3,86}$

التمرين 7 :

قيم X هي : 20 ، 10 ، -5

قانون الاحتمال : $p(x=10) = \frac{1}{6}$

$$p(x=-5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} , p(x=20) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

X_i	20	10	-5
$p(X=X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

- الأمل الرياضي :

$$E = 20 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{6} + (-5) \times \frac{1}{3} = 10 + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 10$$

- التباين :

$$V = (20)^2 \times \frac{1}{2} + (10)^2 \times \frac{1}{6} + (-5)^2 \times \frac{1}{3} - (10)^2$$

$$V = 200 + \frac{100}{6} + \frac{25}{3} - 100$$

$$V = 100 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} = 100 + \frac{75}{3} = \frac{375}{3} = 125$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{125} \approx 11,18$$

التمرين 8 :

(1) تعيين n بحيث : $C_n^1 + C_n^2 = 10$

• من أجل $n=0$: $C_0^1 + C_0^2 = 10$ أي $0 = 10$ مستحيلة

• من أجل $n=1$: $C_1^1 + C_1^2 = 10$ أي $1 = 0$ مستحيلة

ومنه $0 \leq n \leq 998$ لكن $n \in]n_1 ; n_2[$

ومنه : $n \in [0 ; 998]$ إذن : $n \in \mathbb{N}$ مما سبق

التمرين 9 :
حل المعادلة : $x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p = 0$

$$\Delta = (-C_n^p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p$$

$$\Delta = (C_n^p)^2 - 4 C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p$$

$$\Delta = (C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p)^2 - 4 C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p$$

$$\Delta = (C_{n-1}^{p-1})^2 + 2 C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p + (C_{n-1}^p)^2 - 4 C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p$$

$$\Delta = (C_{n-1}^{p-1})^2 - 2 C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p + (C_{n-1}^p)^2 = (C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p)^2$$

إذن $\Delta > 0$ ومنه للمعادلة حلين متميزين.

$$x_2 = \frac{C_n^p + (C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p)}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{C_n^p - (C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p)}{2}$$

وعليه :

$$x_2 = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}{2}$$

$$\text{إذن : } x_2 = C_{n-1}^{p-1} \quad , \quad x_1 = C_{n-1}^p$$

$$S = \{C_{n-1}^{p-1}, C_{n-1}^p\} \quad \text{مجموعة الحلول :}$$

التمرين 10 :
البرهان بالتراجع على صحة الخاصية :

$$p(n) : (2n+1)(2n+3)(2n+5) \dots (4n-1) = \frac{(4n)! \cdot n!}{2^n [(2n)!]^2}$$

$$3 = \frac{4! \cdot 1!}{2 \cdot (2)^2} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \cdot 4} = 3 : n=1 \quad \bullet$$

ومنه (1) صحيحة.

نفرض صحة $p(k)$ ونبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : (2k+1)(2k+3)(2k+5) \dots (4k-1) = \frac{(4k)! \cdot k!}{2^k [(2k)!]^2}$$

$$p(k+1) : \underbrace{(2k+3)(2k+5) \dots (4k+3)}_A = \underbrace{\frac{(4k+4)! (k+1)!}{2^k [(2k+2)!]^2}}_B$$

$$A : (2k+3)(2k+5) \dots (4k+3)$$

$$\frac{(2k+1) \times (2k+3)(2k+5) \dots (4k-1)(4k+1)(4k+3)}{(2k+1)}$$

$$(2k+1)(2k+2) \dots (4k-1) \cdot \frac{(4k+1)(4k+3)}{(2k+1)}$$

$$\frac{(4k)! \cdot k!}{2^k [(2k)!]^2} \times \frac{(4k+1)(4k+2)(4k+3) \times (4k+4)(k+1)}{(2k+1) \times (4k+2) \times (4k+4) \times (k+1)}$$

$$\frac{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)(4k)! \cdot (k+1)(k)!}{2^k \cdot (2k)!(2k)!(2k+1)(2k+2) \cdot 2(2k+1) \cdot 2(2k+2)(k+1)}$$

$$(4k+4)! \cdot (k+1)!$$

$$\frac{2^{k+1} \cdot (2k+2)(2k+1)(2k)! \cdot (2k+2)(2k+1)(2k)!}{(4k+4)! (k+1)!}$$

$$\frac{2^{k+1} (2k+2)! \cdot (2k+2)!}{(4k+4)! (k+1)!}$$

$$\frac{(4k+4)! (k+1)!}{2^{k+1} [(2k+2)!]^2} = B$$

ومنه : $p(k+1)$ صحيحة ومنه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$(1) \text{ نبرهن أن : } C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$\text{لدينا : } (x+y)^n = C_n^0 x^{n-0} y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \dots + C_n^n x^{n-n} y^n$$

نضع : $x=y=1$ نجد :

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \quad \text{ومنه :}$$

$$(2) \text{ اثبات أن : } p C_{n+1}^p = (n+1) \cdot C_n^{p+1}$$

$$p \cdot C_{n+1}^p = p \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1-p)! \cdot p!} \quad \text{لدينا :}$$

وعليه : $100 - p = 90$ ومنه $p = 10$ إذن معامل x^{90} هو : $C_{100}^{10} \cdot 5^{90}$
التمرين 13 :

$$(x + 2y)^{50} = \sum_{p=0}^{50} C_{50}^p x^{50-p} \cdot (2y)^p$$

$$(x + 2y)^{50} = \sum_{p=0}^{50} C_{50}^p \cdot 2^p \cdot x^{50-p} \cdot y^p$$

$$\begin{cases} 50 - p = 30 \\ p = 20 \end{cases} \quad (1) \text{ معامل } x^{30} \cdot y^{20} : \text{ لدينا}$$

ومنه : $p = 20$ إذن معامل $x^{30} \cdot y^{20}$ هو : $C_{50}^{20} \cdot 2^{20}$

(2) رتبة الحد $x^{40} \cdot y^{10}$: لدينا $p = 10$ وعليه رتبة الحد هي 11.
التمرين 14 :

(1) عدد الأعداد هو : 9^4 (قوائم). أي 6561 عدد (2) عدد الأعداد هو : 9^{10} (قوائم)

(3) عدد الأعداد هو : A_9^4 حيث : $A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!}$ أي $A_9^4 = 3024$

(4) عدد الأعداد هو $9!$ لأن $A_9^9 = 9!$ عدد الأعداد هو 0 لأن $A_9^{10} = 0$

(6) عدد المجموعات الجزئية ذات 4 عناصر هو C_9^4 أي 126 مجموعة جزئية

(7) عدد المجموعات هو 0 : لأن : $C_9^{10} = 0$

التمرين 15 :

(1) عدد الأعداد المكونة من 4 أرقام : وهي من الشكل abcd
لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم الأحاد d.

مع كل اختيار لرقم الأحاد d لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم العشرات C

ومع كل اختيار لرقم الأحاد والعشرات d و c لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم المئات b.

ومع كل اختيار لرقم الأحاد والعشرات والمئات d و c و b لدينا 9 إمكانيات لاختيار رقم الآلاف a
أي : $a \neq 0$

عليه عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو : $10 \times 10 \times 10 \times 9$

9×10^3 أي 9000 عدد.

(2) عدد الأعداد المكونة من 4 أرقام متميزة مثلي مثلي :

عدد الأعداد من الشكل abcd هو : $A_{10}^4 = 5040$

عدد الأعداد يمكن أن تشمل 0 على اليسار أي من الشكل 0bcd وهي لا تعد ذات 4 أرقام.

عدد الأعداد من الشكل 0bcd هو : $A_9^3 = 504$

إذن عدد الأعداد من الشكل abcd حيث $a \neq 0$ هو : $A_{10}^4 - A_9^3 = 4536$

ومنه : $p \cdot C_{n+1}^p = \frac{p \cdot (n+1)!}{[n - (p-1)]! \cdot p \cdot (p-1)!}$

وعليه : $p \cdot C_{n+1}^p = (n+1) \cdot \frac{n!}{[n - (p-1)]! \cdot (p-1)!}$

إذن : $p \cdot C_{n+1}^p = (n+1) \cdot C_n^{p-1}$

(3) حساب : $\frac{1}{1} \cdot C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{p+1} C_n^p + \dots + \frac{1}{p+1} C_n^n$

لدينا من : $p \cdot C_{n+1}^p = (n+1) C_n^{p-1}$ وعليه : $\frac{1}{p} \cdot C_n^{p-1} = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^p$

ومنه لما : $p = 1$: $\frac{1}{1} \cdot C_n^0 = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^1$

لما : $p = 2$: $\frac{1}{2} \cdot C_n^1 = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^2$

لما : $p = 3$: $\frac{1}{3} \cdot C_n^2 = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^3$

.....
لما : $p = n+1$: $\frac{1}{n+1} \cdot C_n^n = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{n+1}$

بالجمع طرفاً لطرف نجد :

$$\frac{1}{1} C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1})$$

وعليه :

$$\frac{1}{1} C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1} \cdot [2^{n+1} - C_{n+1}^0]$$

$$1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{1}{n+1} \cdot [2^{n+1} - 1]$$

التمرين 12 :

$$(5x + 1)^{100} = \sum_{p=0}^{100} C_{100}^p (5x)^{100-p} \cdot (1)^p$$

$$(5x + 1)^{100} = \sum_{p=0}^{100} C_{100}^p 5^{100-p} \cdot x^{100-p}$$

(3) عدد الأعداد المكونة من 4 أرقام و تكون مضاعفة للعدد 5 :
هذه الأعداد من الشكل $abc0$ أو $abc5$ حيث $a \neq 0$ أي رقم أحدها 0 أو 5
وعدد كل منها يحسب كمايلي :

لدينا : 2 إمكانيات لاختيار رقم الأحاد (0 أو 5).

ومع كل اختيار لرقم الأحاد لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم العشرات c

ومع كل اختيار لرقم الأحاد والعشرات لدينا 10 إمكانيات لاختيار رقم المئات b

ومع كل اختيار لأرقام الأحاد والعشرات والمئات لدينا 9 إمكانيات لاختيار رقم الآلاف a لأن $a \neq 0$.

ومنه عدد الأعداد هو : 1800 عدد.

$$9 \times 10 \times 10 \times 2 = 18 \times 10^2 = 1800$$

4- عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متميزة مثنى مثنى و فردية هذه الأعداد من الشكل : abc

حيث : $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $a \neq 0$

عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متميزة مثنى مثنى و فردية (بما فيها التي تشمل 0 على

اليسار)

لدينا 5 إمكانيات لاختيار c.

ومع كل اختيار للرقم c لدينا 9 إمكانيات لاختيار b.

ومع كل اختيار للرقم c و الرقم b لدينا 8 إمكانيات لاختيار a.

ومنه عدد الأعداد هو : $5 \times 9 \times 8 = 360$

عدد الأعداد من الشكل abc هو :

لدينا 5 إمكانيات لاختيار c

ومع كل اختيار للعدد c لدينا 8 إمكانيات لاختيار b.

ومنه عدد الأعداد هو : $5 \times 8 = 40$. وعليه عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متميزة مثنى

مثنى و فردية هو : $360 - 40 = 320$

التمرين 16 :

عدد السحبات الممكنة : $C_{20}^3 = 1140$

(1) عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات من نفس اللون : $C_6^3 + C_{10}^3 + C_4^3 = 84$

الاحتمال : $p_1 = \frac{84}{1140}$

(2) عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات مختلفة اللون.

$C_6^1 + C_{10}^1 + C_4^1 = 240$ الاحتمال : $p_2 = \frac{240}{1140}$

(3) عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات بيضاء : $C_6^3 = 20$

الاحتمال : $p_3 = \frac{20}{1140}$

4- عدد الحالات الملائمة لسحب 3 كرات غير حمراء : $C_{10}^3 = 60$

الاحتمال : $p_4 = \frac{60}{1140}$

5- عدد الحالات الملائمة لسحب كرة حمراء على الأقل :

$$C_{10}^1 \times C_{10}^2 + C_{10}^2 \times C_{10}^1 + C_{10}^3 = 960$$

الاحتمال : $p_5 = \frac{960}{1140}$

6- عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمراوين على الأكثر :

$$C_{10}^2 \times C_{10}^1 + C_{10}^1 \times C_{10}^2 + C_{10}^3 = 960$$

الاحتمال : $p_6 = \frac{960}{1140}$

7- عدد الحالات الملائمة لسحب كرة بيضاء واحدة : $C_6^1 \times C_{14}^2 = 546$

الاحتمال : $p_7 = \frac{546}{1140}$

التمرين 17 :

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$A \cap B = \{3\}$$

$$p(B) = \frac{C_6^1}{C_{20}^1} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad (2) \quad p(A) = \frac{C_8^1}{C_{20}^1} = \frac{8}{20} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{C_1^1}{C_{20}^1}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{20} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{16} \quad (4)$$

التمرين 18 :

عدد السحبات الممكنة : $C_{15}^2 = 105$

أ- اثنان A الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 15

$$A = \{\{1, 14\}, \{2, 13\}, \{3, 12\}, \{4, 11\}, \{5, 10\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}\}$$

ومنه عدد الحالات الملائمة هو : 7 إذن : $p(A) = \frac{7}{105} = \frac{1}{15}$

2- لتكن B الحادثة المعرفة بالفرق بين الرقمين يساوي 5.

$$B = \{\{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \{6, 11\}, \{7, 12\}, \{8, 13\}, \{9, 14\}, \{10, 15\}\}$$

ومنه عدد الحالات الملائمة هو : 10 إذن : $p(B) = \frac{10}{105} = \frac{2}{21}$

3- حساب : $p_B(A)$

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

لدينا : $A \cap B = \{\{5, 10\}\}$ ومنه : $p(A \cap B) = \frac{1}{105}$

إذن : $p_B(A) = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{2}{21}} = \frac{1}{105} \times \frac{21}{2} = \frac{1}{10}$

4- لدينا : $p(A) = \frac{1}{15}$ و $p_B(A) = \frac{1}{10}$

وعليه : $p_B(A) \neq p(A)$ ومنه A و B غير مستقلتين.

التمرين 19 :
بما أن A و B حادثتان مستقلتان فإن :

1) $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06$

2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = 0,6 + 0,1 - 0,06 = 0,64$

3) $p(A \cup \bar{B}) = p(A) + p(\bar{B}) - p(A \cap \bar{B})$

لدينا : $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0,9$ وبما أن A و B مستقلتان

فإن : A و \bar{B} مستقلتان ومنه : $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \cdot p(\bar{B}) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$

وعليه : $p(A \cup \bar{B}) = 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96$

4) $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(A \cap B)$

إذن :

مث : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ أي أن : $p(\bar{A}) = 0,4$

$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \cdot p(B)$ ومنه : $p(\bar{A} \cap B) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$

وبالتالي :

$p(\bar{A} \cup B) = 0,4 + 0,1 - 0,04 = 0,46$

5) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$

6) $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\bar{A}) + p(\bar{B}) - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,4 + 0,9 - 0,36 = 0,94$

التمرين 20 :
عدد عناصر مجموعة الإمكانيات هو : $6 \times 6 = 36$ وهي مبينة في الجدول الآتي :

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

رمز المغير العشوائي هي : 0, 2, 4, 6

$(X = 0) = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

$(X = 2) = \{(2, 2), (1, 2), (3, 2), (5, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6)\}$

$(X = 4) = \{(2, 4), (4, 2), (4, 4), (1, 4), (4, 1), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)\}$

$(X = 6) = \{(2, 6), (6, 2), (4, 6), (6, 4), (6, 6), (1, 6), (6, 1), (3, 6), (6, 3), (5, 6), (6, 5)\}$

$p(X = 0) = \frac{9}{36}$, $p(X = 2) = \frac{7}{36}$

$p(X = 4) = \frac{9}{36}$, $p(X = 6) = \frac{11}{36}$

قيم X	0	2	4	6
P(X)	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

التمرين 23 :

احتمال ظهور كل من الوجه F و الظهر p هو 0,5 و عليه فالتجربة العشوائية X تتبع قانون ثنائي الحد للوسيطين 0,5 و 10. ومنه قانون الاحتمال يعطى بالعلاقة :

$$p_X(k) = C_{10}^k (0,5)^k (0,5)^{10-k} = C_{10}^k \cdot (0,5)^{10}$$

(1) حساب احتمال أن يربح هذا اللاعب 3DA :

حتى يربح هذا اللاعب 3DA يجب أن يظهر F 6 مرات ومنه الاحتمال هو $6 \times p$ حيث

$$p_X(6) = C_{10}^6 (0,5)^{10} = \frac{10!}{4! \times 6!} \times (0,5)^{10} = 0,2 :$$

2- التمثيل البياني لقانون المتغير العشوائي: قيم المتغير العشوائي هي : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 أي عدد الحالات التي تظهر فيها F خلال 10 رميات ومنه :

$$p_X(1) = C_{10}^1 (0,5)^{10} \approx 0,0097$$

$$p_X(0) = C_{10}^0 (0,5)^{10} \approx 0,00097$$

$$p_X(2) = C_{10}^2 (0,5)^{10} \approx 0,044 \quad p_X(3) = C_{10}^3 (0,5)^{10} \approx 0,117$$

$$p_X(4) = C_{10}^4 (0,5)^{10} \approx 0,21 \quad p_X(5) = C_{10}^5 (0,5)^{10} \approx 0,25$$

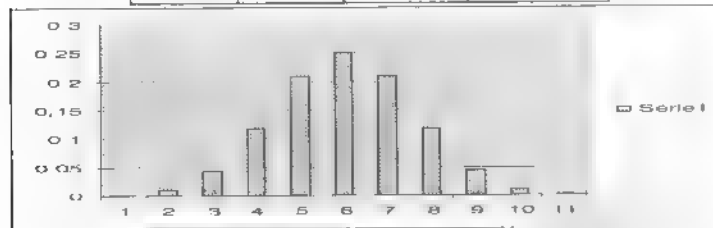
$$p_X(6) = C_{10}^6 (0,5)^{10} \approx 0,2 \quad p_X(7) = C_{10}^7 (0,5)^{10} \approx 0,117$$

$$p_X(8) = C_{10}^8 (0,5)^{10} \approx 0,044 \quad p_X(9) = C_{10}^9 (0,5)^{10} \approx 0,0097$$

$$p_X(10) = C_{10}^{10} (0,5)^{10} \approx 0,00097$$

X_i	0	1	2	3	4	5	6
$p_X(x_i)$	0,00097	0,0097	0,044	0,117	0,21	0,25	0,2

	7	8	9	10
	0,117	0,044	0,0097	0,00097



التمرين 24 :

(1) عدد السحبات الممكنة : $A_{10}^5 = 30240$

$$E(X) = 0 \times \frac{9}{36} + 2 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{116}{36} = \frac{29}{9} \approx 3,2$$

3- التباين :

$$V(X) = (0)^2 \times \frac{9}{36} + (2)^2 \times \frac{7}{36} + (4)^2 \times \frac{9}{36} + (6)^2 \times \frac{11}{36} - \left(\frac{29}{9}\right)^2$$

$$= \frac{28 + 144 + 396}{36} - \frac{841}{81} = \frac{437}{81} \approx 5,4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,3 \quad \text{4- الانحراف المعياري :}$$

التمرين 21 :

الاحتمالات للإختيار العشوائي لحاسوب أنتج في السلاسل C_1, C_2, C_3 هي

$$\frac{10}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100} \text{ على الترتيب أي :}$$

$$p(C_1) = 0,5, \quad p(C_2) = 0,4, \quad p(C_3) = 0,1$$

الاحتمالات الشرطية لأن يكون الحاسوب صالحا للاستعمال علما أنه أنتج في إحدى السلاسل

C_1, C_2, C_3 هي $p_{C_1}(A)$ و $p_{C_2}(A)$ و $p_{C_3}(A)$ على الترتيب

حيث : $p_{C_1}(A) = 0,9$ و $p_{C_2}(A) = 0,8$ و $p_{C_3}(A) = 0,7$

وحسب دستور الاحتمالات الكلية :

$$p(A) = p_{C_1}(A) \cdot p(C_1) + p_{C_2}(A) \times p(C_2) + p_{C_3}(A) \times p(C_3)$$

$$p(A) = 0,9 \times 0,5 + 0,8 \times 0,4 + 0,7 \times 0,1 = 0,84$$

التمرين 22 :

(1) بما أن في هذه التجربة ربح في حالة سحب الرقم 10 وخسارة في حالة سحب أي رقم آخر فإن التجربة تشمل على ربح أو خسارة وبالتالي فهي تجربة لبرنولي.

$$(2) \text{ احتمال الربح : } p = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$\text{احتمال الخسارة : } 1 - p = 1 - 0,01 = 0,99$$

(3) وسيط المتغير العشوائي X لبرنولي هو 0,01 ويكون قانونه كمايلي

X_i	1	0
$p_X(x_i)$	0,01	0,99

$$E(X) = 1 \times 0,01 + 0 \times 0,99 = 0,01 = p$$

$$V(X) = p(1 - p) = 0,01 \times 0,99 = 0,0099$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,099$$

ومنه : $p_n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ أي $p_n = \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \times \frac{3}{5}$

2- حساب S_n : p_n هو الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول $p_1 = \frac{3}{5}$ وأساسها

$q = \frac{2}{5}$. وعليه : $S_n = p_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$$S_n = \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1$$

التمرين 26 : حساب p_k : بما أن احتمال أن يختار أحد الأشخاص من العينة المستجوبة المنتج A هو : $p = 0,3$ فإن احتمال أن لا يختار المنتج هو : $q = 1 - p = 0,7$ وعليه هذه التجربة هي لبرنولي وهي مكررة 20 مرة.

وعليه قانون الاحتمال p_x هو قانون ثنائي الحد للوسيطين 20 و 0,3

ومنه احتمال أن نحصل على k شخص من العينة يختار المنتج هو :

$$p_k = C_{20}^k (0,3)^k \cdot (0,7)^{20-k} \text{ مع } k \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$$

2) احتمال أن يختار 4 أشخاص هذا المنتج هو : $p_4 = C_{20}^4 (0,3)^4 \cdot (0,7)^{16}$

$$p_4 = \frac{20!}{16! 4!} (0,3)^4 \times (0,7)^{16} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (0,3)^4 (0,7)^{16}$$

$$p_4 = 5 \times 19 \times 3 \times 7 (0,3)^4 (0,7)^{16} \approx 0,537$$

التمرين 27 :

$$p(G) = p(F) = \frac{1}{2} \text{ هي تجربة لبرنولي لأن :}$$

$$\text{وعليه : } p(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$$

أي أن احتمال الحصول 3 ذكور في 5 ولادات هو $\frac{5}{16}$

التمرين 28 :

$$A_6^4 \times A_4^1 = 1440 \text{ : عدد السحبات الملائمة :}$$

$$p_1 = \frac{1440}{30240} \approx 0,048 \text{ أي : } p_1 = \frac{A_6^4 \times A_4^1}{A_{10}^5}$$

$$C_4^1 \times (A_4^1 \times A_6^4) \text{ : عدد الحالات الملائمة هو :}$$

$$p_2 = \frac{5760}{30240} \approx 0,19 \text{ أي : } p_2 = \frac{4 \cdot A_4^1 \times A_6^4}{A_{10}^5}$$

$$10^5 = 100000 \text{ : عدد السحبات الممكنة :}$$

$$6^4 \times 4^1 = 5184 \text{ : عدد السحبات الملائمة :}$$

$$p_3 = \frac{5184}{100000} \approx 0,052 \text{ أي : } p_3 = \frac{6^4 \times 4^1}{10^5}$$

$$C_4^1 \times 6^4 \times 4^1 \text{ : عدد الحالات الملائمة هو :}$$

$$p_4 = \frac{20736}{100000} \approx 0,207 \text{ أي : } p_4 = \frac{4 \cdot 6^4 \times 4^1}{10^5}$$

التمرين 25 :

عدد السحبات الممكنة هو 10^n عند سحب n كرة

1) حساب p_1 : هناك سحبة واحدة أي نحصل على كرة حمراء . ومنه عدد السحبات الملائمة هو

$$6^1 \text{ . إذن : } p_1 = \frac{6^1}{10^1} = \frac{3}{5}$$

حساب p_2 : هناك سحبتين و عليه نحصل على كرة خضراء ثم كرة حمراء بهذا الترتيب . وعليه

$$\text{عدد الحالات الملائمة هو : } 4^1 \times 6^1$$

$$\text{إذن : } p_2 = \frac{4^1 \times 6^1}{10^2} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

حساب p_3 : هناك 3 سحبات و عليه نحصل على كرتين خضراوين ثم كرة حمراء بهذا

$$\text{الترتيب وعليه عدد الحالات الملائمة هو : } 4^2 \times 6^1$$

$$\text{ومنه : } p_3 = \frac{12}{125} \text{ أي : } p_3 = \frac{4^2 \times 6^1}{10^3} = \frac{16 \cdot 6}{10^3}$$

حساب p_n : هناك n سحبة و عليه نحصل على n - 1 كرة خضراء ثم كرة حمراء بهذا الترتيب

$$\text{وعليه عدد السحبات الملائمة هو : } 4^{n-1} \times 6^1$$

$$\text{وبالتالي : } p_n = \frac{4^{n-1} \times 6^1}{10^n} \text{ أي : } p_n = \frac{4^{n-1}}{10^n} \times \frac{6}{10}$$

إن: $1 - e^{-100\lambda} = 0,05$ أي: $e^{-100\lambda} = 0,95$
 إن: $\ln e^{-100\lambda} = \ln 0,95$ وعليه: $-100\lambda = \ln 0,95$

إن: $\lambda = \frac{\ln 0,95}{-100}$ وعليه: $\lambda \approx 0,0005$

إن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X هي الدالة f حيث: $f(t) = 0,0005 e^{-0,0005t}$
 (2) احتمال أن يتم الانشطار في أقل من 150 سنة:

$$p([0; 150]) = \int_0^{150} 0,0005 \cdot e^{-0,0005t} dt = [1 - e^{-0,0005 \times 150}] \approx 0,072$$

3- احتمال أن يكون الانشطار على الأقل في 150 سنة:
 الحادثة أن يكون الانشطار على الأقل في 150 سنة هي الحادثة العكسية للحادثة أن يتم الانشطار في أقل من 150 سنة.

إن: $p([150; +\infty[) = 1 - p([0; 150]) = 1 - 0,072 \approx 0,928$
 4- المدة المتوسطة للانشطار النووي:

لدينا: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0005}$ وعليه: $E(X) \approx 2000$

إن المدة المتوسطة للانشطار النووي هي 2000 سنة.

التمرين 30:

1- حساب $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$

لدينا: $\int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt = [f(t) \cdot g(t)]_a^b - \int_a^b g(t) \cdot f'(t) dt$

بوضع: $f'(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ و $g(t) = t$

نجد: $f(t) = -e^{-\lambda t}$ و $g'(t) = 1$

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = [-t e^{-\lambda t}]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} dt = [-t e^{-\lambda t}]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t} dt$$

$$= [-t e^{-\lambda t}]_0^x + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left[e^{-\lambda t} \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\right]_0^x$$

أي: $p_1 = p_2 = \dots = \frac{1}{p_{12}} = \frac{1}{12}$

(2) محاكاة السلسلة هو محاكاة أعداد من المجموعة $\{1, 2, \dots, 12\}$ إما بالة بيانية أو بمجدول. فنحصل على أعداد عشوائية محصورة بين 1 و 12.

(3) حساب d^2 : $d^2 = \sum_{i=1}^{12} (f_i - p_i)^2$

لدينا: $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_{12} = 0,083$

$f_1 = \frac{9}{100} = 0,09$, $f_2 = \frac{10}{100} = 0,1$, $f_3 = \frac{7,5}{100} = 0,075$

$f_4 = \frac{7,5}{100} = 0,075$, $f_5 = \frac{7}{100} = 0,07$, $f_6 = \frac{6}{100} = 0,06$

$f_7 = \frac{6}{100} = 0,06$, $f_8 = \frac{5}{100} = 0,05$, $f_9 = \frac{8}{100} = 0,08$

$f_{10} = \frac{10,5}{100} = 0,105$, $f_{11} = \frac{10,5}{100} = 0,105$, $f_{12} = \frac{13}{100} = 0,13$

$$d^2 = (0,09 - 0,083)^2 + (0,1 - 0,083)^2 + (0,075 - 0,083)^2 + (0,075 - 0,083)^2 + (0,07 - 0,083)^2 + (0,06 - 0,083)^2 + (0,05 - 0,083)^2 + (0,08 - 0,083)^2 + (0,105 - 0,083)^2 + (0,105 - 0,083)^2 + (0,13 - 0,083)^2$$

$$d^2 = 5968 \cdot 10^{-6} \approx 0,005968$$

(4) نعم النموذج مقبول. أي أن: "الإقبال على السينما مستقل عن شهر خلال سنة" قاعدة صحيحة.

لأن $d_2 \leq D_9$ لأن $D_9 = 0,0072$

حيث D_9 هو العشير التاسع الموضح في التمثيل بالعلة.

التمرين 29:

(1) ليكن X المتغير العشوائي المرفق بتجربة مدة انشطار النواة

ولدينا: $p([0; 100]) = 0,05$ نكن: $\int_0^{100} \lambda e^{-\lambda t} dt$

ومنه: $p([0; 100]) = [-e^{-\lambda t}]_0^{100} = 1 - e^{-100\lambda}$

$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt = [f(t) \cdot g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t) \cdot f(t) dt \quad \text{لدينا :}$$

$$g(t) = t \quad \text{و} \quad f'(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{: بوضع}$$

$$g'(t) = 1 \quad \text{و} \quad f(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \quad \text{: نجد}$$

$$\int_0^y t e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} \right]_0^y + \frac{1}{\lambda} \int_0^y e^{-\lambda t} dt \quad \text{ومنه :}$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} t e^{-\lambda t} \right]_0^y + \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^y = \left[\left(-\frac{1}{\lambda} t - \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda t} \right]_0^y \\ = \left(-\frac{1}{\lambda} y - \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda y} + \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\int_0^y t^2 e^{-\lambda t} dt = -y^2 e^{-\lambda y} + 2 \left(-\frac{1}{\lambda} y - \frac{1}{\lambda^2} \right) e^{-\lambda y} + \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{الآن :}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \left(-\lambda^2 y^2 e^{-\lambda y} - 2\lambda y e^{-\lambda y} - 2e^{-\lambda y} \right) + \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{وطيه :}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{لدينا :} \quad \text{نساج : } V(X)$$

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x} \left(-x - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (-\lambda x - 1) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

حساب النهاية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} (-\lambda x - 1) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} (-\lambda x \cdot e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}) + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

- استنتاج $E(X)$: لتكن الدالة f :

* الدالة مستمرة على $[0 ; +\infty[$ * الدالة موجبة على $[0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - e^{-\lambda t}] = 1 \quad \text{ولدينا :}$$

وعليه الدالة f هي دالة كثافة الاحتمال p_X المعرف على المتغير العشوائي X

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{\lambda} \quad \text{ومنه :}$$

$$\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt \quad \text{2- حساب}$$

$$\int_a^b f'(t) \cdot g(t) dt = [f(t) \cdot g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t) \cdot f(t) dt \quad \text{لدينا :}$$

$$g(t) = t^2 \quad \text{و} \quad f'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{بوضع}$$

$$g'(t) = 2t \quad \text{و} \quad f(t) = -e^{-\lambda t} \quad \text{: نجد}$$

$$\int_0^y \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = [-t^2 e^{-\lambda t}]_0^y - \int_0^y 2t e^{-\lambda t} dt = -y^2 e^{-\lambda y} + 2 \int_0^y t e^{-\lambda t} dt \quad \text{الآن :}$$

$$\int_0^y t e^{-\lambda t} dt \quad \text{حساب التكامل :}$$

11 - الأعداد المركبة

1 - تعريف مجموعة الأعداد المركبة :

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد. وكل عدد مركب يمثل بنقطة وبنقطة وحيدة في المستوي. - النقطة $J(0; 1)$ تمثل العدد المركب الذي نرسم له بالرمز i .
- من أجل كل عددين حقيقيين x و y ، يرمز للعدد المركب الممثل بالنقطة $M(x; y)$ بالرمز $x + iy$ و يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز \mathbb{C} .

2- الشكل الجبري لعدد مركب :

- من أجل كل عددين حقيقيين x و y : الشكل $x + iy$ يسمى الشكل الجبري لعدد مركب Z
- 3- تعاريف و مصطلحات :

ليكن $Z = x + iy$ عدد مركب، x و y عددين حقيقيين

- العدد الحقيقي x يسمى الجزء أو القسم الحقيقي للعدد المركب Z و نرسم له بالرمز

$$\operatorname{Re}(Z) = x \quad \text{أي} \quad \operatorname{Re}(Z)$$

- العدد الحقيقي y يسمى الجزء أو القسم التخيلي للعدد المركب Z ويرسم له بالرمز

$$\operatorname{Im}(Z) = y \quad \text{أي} \quad \operatorname{Im}(Z)$$

- النقطة $M(x; y)$ تسمى صورة العدد المركب Z و العدد Z يسمى لاحقة M

- من أجل كل عدد حقيقي x, y, x', y' فإن العدد $x + iy$ يساوي العدد

$$x' + iy' \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad x = x' \quad \text{و} \quad y = y'$$

- كل عدد حقيقي هو عدد مركب ولدينا $Z \in \mathbb{R}$ يكافئ: $\operatorname{Im}(Z) = 0$

- يكون العدد المركب Z تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان: $\operatorname{Re}(Z) = 0$

- محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي ومحور الترتيب يدعى المحور التخيلي.

- إذا كان $Z = 0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة O

4- الحساب في \mathbb{C} :

- المجموع و الجداء في \mathbb{C} : المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليتين هما الجمع + و الضرب

\times معرفتان من أجل كل عددين مركبان Z و Z' حيث: $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$Z + Z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$Z \times Z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

هاتين العمليتين لهما نفس خواص الجمع + و الضرب \times في \mathbb{R}

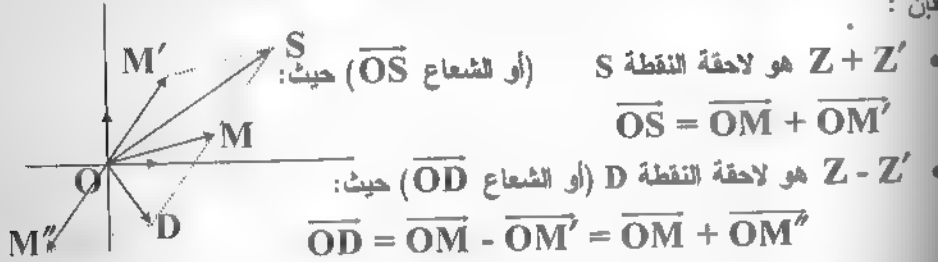
- قوى عدد مركب : القوى الصحيحة لعدد مركب لها نفس خواص القوى الصحيحة لعدد

$$\text{حقيقي ولدينا : } i^2 = (0 + 1 \cdot i) \times (0 + 1 \cdot i)$$

$$\text{منه } i^2 = -1 \quad \text{وعليه } i^2 = (0 - 1) + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1$$

خواص :

إذا كان Z و Z' لاحقتي النقطتين M و M' (أو الشعاعين \vec{OM} و $\vec{OM'}$) على الترتيب



و عليه إذا كانت A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب

فإن لاحقة الشعاع \vec{AB} هو العدد المركب $Z_{\vec{AB}}$ حيث: $Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$

$$\text{ولاحقة النقطة } I \text{ منتصف } [AB] \text{ هو } Z_I \text{ حيث } Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

مقلوب عدد مركب :

Z عدد مركب غير معدوم . حيث $Z = x + iy$

$$\text{لدينا : } \frac{1}{Z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{منه : } \frac{1}{Z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{وهو الشكل الجبري لمقلوب العدد المركب } Z$$

غير المعدوم.

حاصل قسمة عددين مركبين :

Z' و Z عددين مركبان حيث: $Z' \neq 0$ مع $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} = (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \right)$$

• $\rho (\cos\theta + i \sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد Z

• نصف القطر القطبي OM يحقق $OM = \rho$ ويسمى طويلاً Z ونرمز له بالرمز $|Z|$.

• الزاوية القطبية $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ تحقق $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وتسمى

عمدة العدد المركب Z . ونرمز لها بالرمز $\arg(Z)$ ونكتب: $\arg(Z) = \theta + 2k\pi$ و نقرأ θ بترديد 2π

ملاحظات :

لدينا : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ وعليه : $|Z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{وعليه :}$$

وإذا كان $Z = 0$ فإن : $\rho = 0$ لكن Z ليس له عمدة.

خواص :

(A) عدد مركب غير معدوم.

(1) Z حقيقي موجب يكافئ : $k \in \mathbb{Z}$; $\arg(Z) = 0 + 2k\pi$

(2) Z حقيقي سالب يكافئ : $k \in \mathbb{Z}$; $\arg(Z) = \pi + 2k\pi$

(3) $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$: $\text{Re}(Z) = 0$ و $\text{Im}(Z) > 0$ يكافئ :

(4) $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$: $\text{Re}(Z) = 0$ و $\text{Im}(Z) < 0$ يكافئ :

(B) مرافق عدد مركب :

لتكن M, M' صورتي Z و \bar{Z} على الترتيب . لدينا M و M' متناظران بالنسبة

لمحور الفواصل و عليه : $|Z| = |\bar{Z}|$ و

$\arg(Z) = -\arg(\bar{Z}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

(C) جداء عددين مركبان :

\bar{Z}, Z عددين مركبان غير معدومين حيث :

$Z = \rho (\cos\theta + i \sin\theta)$ و $Z' = \rho' (\cos\theta' + i \sin\theta')$

$$= \frac{xx'}{x'^2 + y'^2} - i \frac{xy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{x'y}{x'^2 + y'^2} + \frac{yy'}{x'^2 + y'^2}$$

ومنه : $\frac{Z}{Z'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}$ وهو الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{Z}{Z'}$

5- مرافق عدد مركب :

تعريف :

لكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة $Z = x + iy$ حيث x و y عددين حقيقيين نظيرة

بالنسبة لمحور الفواصل هي النقطة M' ذات اللاحقة $x - iy$. العدد المركب $x - iy$

يسمى مرافق العدد المركب $x + iy$ ونرمز له بالرمز $\bar{Z} = x - iy$ أي :

خواص :

(a) x و y عددين حقيقيين . $Z = x + iy$ عدد مركب . $\bar{Z} = x - iy$ مرافق العدد

المركب Z .

(1) $\bar{\bar{Z}} = Z$ (2) لدينا : $Z + \bar{Z} = 2x$ ومنه : $Z + \bar{Z} = 2 \text{Re}(Z)$

(3) $Z - \bar{Z} = 2iy$ ومنه : $Z - \bar{Z} = 2 \text{Im}(Z)$ (4) $Z \cdot \bar{Z} = x^2 + y^2$

(5) $Z \in \mathbb{R}$ تكافئ $Z = \bar{Z}$ (6) $Z = -\bar{Z}$ تخيلي صرف يكافئ :

(b) x, x', y, y' أعداد حقيقية . Z_1, Z_2 عددين مركبان حيث :

$$Z_1 = x + iy \quad ; \quad Z_2 = x' + iy'$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \quad (2) \quad \overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 \quad (1)$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \quad (4) \quad \overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \frac{1}{\bar{Z}_1} \quad (3)$$

$$\bar{Z}_1^n = (\bar{Z}_1)^n \quad : n \in \mathbb{N}^* \quad (5)$$

وإذا كان : $Z_1 \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$: $\bar{Z}_1^n = (\bar{Z}_1)^n$

6- طويلاً و عمدة عدد مركب :

المستوى منسوب في ما يلي إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $(O; \vec{i}, \vec{j})$. M نقطة

من المستوي إحداثياتها القطبيتان $[\rho; \theta]$ حيث ρ عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي

و عباره Z لاحقة النقطة M يكتب علم الشكل :

$$|Z \cdot Z'| = |Z| \cdot |Z'| \quad \text{وإن} \quad ZZ' = \rho\rho' [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$$

$$\arg(Z \cdot Z') = \arg(Z) + \arg(Z') + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

(D) مقلوب عدد مركب غير معدوم :

نعتبر العدد المركب غير المعدوم : $Z = \rho (\cos\theta + i \sin\theta)$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] \quad \text{وإن} :$$

$$\left| \frac{1}{Z} \right| = \frac{1}{|Z|} \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z) + 2k\pi \quad \text{وعليه} :$$

(E) حاصل قسمة عددين مركبين :

Z' و Z عدنان مركبان حيث $Z' \neq 0$

$$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') \quad \text{و} \quad \left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$$

(F) تساوي عددين مركبين :

Z' و Z عدنان مركبان غير معدومين حيث :

$$Z' = \rho' (\cos\theta' + i \sin\theta') \quad \text{و} \quad Z = \rho (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$Z = Z' \quad \text{يكافئ} : \quad \rho = \rho' \quad \text{و} \quad \theta = \theta' + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

(G) طولية و عمدة Z^n :

Z عدد مركب غير معدوم ، n عدد صحيح.

$$\bullet \quad \text{لدينا} \quad |Z^n| = |Z|^n \quad \text{و} \quad \arg(Z^n) = n \cdot \arg(Z)$$

نتيجة :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{من أجل} \quad n \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R}$$

وهو ما يعرف بدستور موافر .

(H) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط متمايضة من المستوي لواقعها Z_A و Z_B و Z_C

على الترتيب فإن :

$$\bullet \quad \left| \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right| = \frac{AC}{AB} \quad \bullet \quad \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = (\overline{AB}, \overline{AC}) [2\pi]$$

(I) إذا كان \vec{u} و \vec{v} شعاعان لاحقتيهما Z و Z' على الترتيب فإن :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) [2\pi]$$

7- الشكل الأساسي لعدد مركب (ترميز أولير)

- التعريف :

نضع اصطلاحا من أجل كل عدد حقيقي θ : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

فإذا كان Z عدد مركب غير معدوم حيث : $Z = \rho (\cos\theta + i \sin\theta)$ فإن : $Z = \rho \cdot e^{i\theta}$ - خواص :

ليكن Z_1, Z_2 عدنان مركبان حيث : $Z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $Z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

$$1) Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad 2) \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\rho_1} \cdot e^{-i\theta_1} \quad 3) \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$4) Z_1^n = \rho_1^n \cdot e^{in\theta} \quad 5) \bar{Z}_1 = \rho_1 \cdot e^{-i\theta_1}$$

ملاحظة :

لدينا : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$; $e^{i\theta'} = \cos\theta' + i \sin\theta'$ وعليه :

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \dots (1)$$

$$e^{i\theta} \cdot e^{2i\theta'} = (\cos\theta + i \sin\theta) (\cos 2\theta' + i \sin 2\theta') \quad \text{ولدينا} :$$

$$= \cos\theta \cdot \cos 2\theta' - \sin\theta \cdot \sin 2\theta' + i(\cos\theta \cdot \sin 2\theta' + \sin\theta \cdot \cos 2\theta') \dots (2)$$

من (1) ; (2)

$$\sin(\theta + \theta') = \cos\theta \cdot \sin\theta' + \sin\theta \cdot \cos\theta'$$

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cdot \cos\theta' - \sin\theta \cdot \sin\theta'$$

التعبير عن دائرة بالعلاقة $Z = Z_0 + k \cdot e^{i\theta}$

ليكن (C) دائرة مركزها ω ونصف قطرها k . نفرض Z_0 لاحقة ω ، k عدد حقيقي موجب

تماما . من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من (C) لدينا : $M \in (C)$ تكافئ :

$$\|Z - Z_0\| = k$$

، يكافئ $Z - Z_0$ هو عدد مركب غير معدوم طولته k و تكافئ : يوجد عدد حقيقي θ

يمكن القول أن $\theta \in [0 ; 2\pi[$ بحيث : $Z = Z_0 + k \cdot e^{i\theta}$

التعبير عن نصف مستقيم بالعلاقة $Z = Z_0 + k \cdot e^{i\theta}$

أما (ω, x) نصف مستقيم مبداء ω و شعاع توجيهه \vec{v} معطى . نفرض Z_0 لاحقة ω ،

لاحقة \vec{v} ، $u \in \mathbb{C}^*$ ، $\arg(u) = \theta [2\pi]$ ، $1 \leq |u|$

التمرين 2 : المستوى مزود بمعلم متعامد متجانس مباشر $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{o})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحظها $1 - i, 2i, 3$ على الترتيب .

(1) عين لواحظ الأشعة $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

(2) عين لاحقة النقطة D حتى يكون $ABCD$ متوازي أضلاع . ثم عين لاحقة مركزه .

التمرين 3 : المستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{o})$. عين مايلي :

(1) المجموعة (E_1) للنقط M ذات اللاحقة ki حيث $k \in \mathbb{R}_+$

(2) المجموعة (E_2) للنقط M ذات اللاحقة $k(1 + \sqrt{3}i)$ مع $k \in \mathbb{R}_+$

التمرين 4 :

نعتبر العدد المركب Z حيث : $Z = 1 - x + 2(1 - x^2)i$ حيث $x \in \mathbb{R}$ عين قيم العدد الحقيقي x في كل حالة ممايلي إن أمكن .

(1) $Z \in \mathbb{R}$ (2) $Z = -\bar{Z}$ (3) $\text{Re}(Z) = 4$

(4) $\text{Im}(Z) = 2$ (5) $Z = 0$ (6) $Z = 1 + i$

التمرين 5 :

نعتبر الأعداد المركبة : $Z_1 = 2 - 2i, Z_2 = -3 + 3i\sqrt{3}, Z_3 = 4\sqrt{3} - 4i$ (1) أكتب كل من الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$$Z_1^4, \frac{Z_2^2}{Z_1 \cdot Z_3}, Z_1 \times Z_2 \times Z_3, \frac{Z_1}{Z_2}, Z_2^2, Z_1 \cdot Z_2, Z_3, Z_2, Z_1$$

(2) احسب مرافق العدد المركب : $\frac{2Z_1 \times Z_2}{iZ_3}$

التمرين 6 :

عدد الأعداد : $Z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}, Z_2 = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}, Z_3 = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$ اكتب على الشكل الأسّي الأعداد المركبة الآتية :

$$Z_1 \cdot Z_2; Z_1 \times Z_2 \times Z_3; \frac{Z_1^2}{Z_2}; \frac{Z_1}{Z_2}$$

التمرين 7 :

العلاقين : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$ و $\cos\theta - i \sin\theta = e^{-i\theta}$ استخرج $\sin\theta$ و $\cos\theta$ على الشكل الأسّي .

التمرين 8 :

أكتب $(\cos\theta + i \sin\theta)^4$ بطريقتين

(7) طولية و عمدة العدد المركب $\sin\theta + i \cos\theta$ هما 1 و $\theta - \frac{\pi}{2}$ على الترتيب .

(8) إذا كانت عمدة Z هي $\frac{\pi}{4}$ فإن عمدة $(-Z)$ هي $-\frac{\pi}{4}$.

(9) إذا كانت عمدة Z هي $\frac{\pi}{4}$ فإن عمدة $-Z$ هي $\pi + \frac{\pi}{4}$ أي $\frac{5\pi}{4}$.

(10) طولية العدد المركب : $e^{i\frac{\pi}{6}} (2 - 2\sqrt{2})$ هي $2 - 2\sqrt{2}$ وعمدته $\frac{\pi}{6}$.

(11) طولية العدد المركب : $e^{i\frac{\pi}{3}} (1 - \sqrt{3})$ هي $(1 - \sqrt{3})$ وعمدته $\pi + \frac{\pi}{3}$

(12) إذا كان $\frac{Z}{\bar{Z}}$ حقيقي و $Z \neq 0$ فإن $Z = \bar{Z}$ أو $Z = -\bar{Z}$

(13) مرافق العدد المركب : $\frac{Z}{Z-1}$ هو $\frac{Z}{\bar{Z}+1}$

(14) مرافق العدد المركب : $\frac{Z}{Z+i}$ هو $\frac{Z}{\bar{Z}-i}$

(15) مرافق العدد المركب : $\frac{4Z}{Z-2}$ هو $\frac{4\bar{Z}}{\bar{Z}-2}$

(16) تكون طول العدد المركب Z مساوية إلى 1 إذا وفقط إذا كان $\frac{1}{Z} = \bar{Z}$

(17) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث $\left| \frac{Z-1-i}{Z-3} \right| = 1$ هي المستقيم (Δ) محور

$[AB]$ حيث $A(1; 1)$ و $B(3; 0)$

(18) إذا كانت : $\left(\overline{AC}, \overline{AB} \right) = \frac{\pi}{3}$ فإن : $\arg \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) = \frac{\pi}{3}$

(19) إذا كانت : $\left(\overline{AB}, \overline{AC} \right) = \frac{\pi}{3}$ فإن : $\arg \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(20) كل معادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية و مميزها سالب تقبل حلين مترافقين

(21) كل معادلة من الدرجة الثانية و بمعاملات حقيقية تقبل حلين مترافقين .

(22) إذا كان f تحويلًا نقطيًا يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z بالنقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = 2iZ + 2$ فإن f دوران

ثم استنتج $\sin 4\theta$ و $\cos 4\theta$ بدلالة $\sin \theta$ و $\cos \theta$
التمرين 9 :

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة : $2Z^4 = 1$ أنشر العبارة : $(Z-1)(Z^3 + Z^2 + Z + 1)$

(3) استنتج حلول المعادلة : $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$
التمرين 10 :

نعتبر المعادلة :

$$Z^2 - [\sqrt{3} + 1 + 2i]Z + \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1) = 0 \dots (1)$$

في مجموعة الأعداد المركبة.

1- أحسب : $(\sqrt{3} - 1)^2$

2- حل في \mathbb{C} المعادلة (1). نفرض Z_1, Z_2 حلها : $|Z_1| > |Z_2|$.

3- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسّي.

4- استنتج طويلة و عمدة $Z_1 \times Z_2$

5- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\left(\frac{Z_1 \times Z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n \in \mathbb{R}_+$

6- نضع $a = \frac{Z_1}{2}$ و $b = \frac{Z_2}{\sqrt{2}}$ و $C = \frac{a+b}{1+ab}$

- تحقق أن : $|a| = |b| = 1$ - أحسب \bar{C} بدلالة a و b . ماذا استنتج ؟

التمرين 11 :

$$Z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$$

نعتبر العدد المركب :

1- أحسب $|Z|$ و $\arg(Z)$ 2- أكتب Z على الشكل الجبري .

3- استنتج $\sin \frac{5\pi}{12}$ و $\cos \frac{5\pi}{12}$ 4- عين الأعداد الطبيعية n بحيث : $\operatorname{Im}\left[\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n\right] = 0$

التمرين 12 :

$$iZ^2 + (4i - 3) + i - 5 = 0$$

حل في \mathbb{C} المعادلة :

التمرين 13 :

$$p(Z) = 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})Z - 4$$

نعتبر العبارة :

(1) بين أن $p(Z)$ يقبل جذرا حقيقيا α يطلب تعينه

$$p(Z) = (Z - \alpha)(aZ^2 + bZ + c)$$

(3) حل في \mathbb{C} المعادلة $p(Z) = 0$
التمرين 14 :

(1) أحسب كل من : $(1 - 2i)^2$ و $(1 + 2i)^2$ حل في \mathbb{C} المعادلة :
 $Z^2 + 6Z + 25 = 0$

(3) حل في \mathbb{C} المعادلة : $t^4 + 6t^2 + 25 = 0$
التمرين 15 :

عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث :

$$1) Z' - 1 - 2i = Z \quad 2) Z' = (1 + \sqrt{2})Z - 4i + 4\sqrt{2}$$

$$3) Z' + \sqrt{2} - i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)Z$$

التمرين 16 :

لنكن النقطة M' ذات اللاحقة Z' و النقطة M ذات اللاحقة Z .
عبر عن Z' بدلالة Z إذا كانت M' صورة M بواسطة :

1- الانسحاب الذي شعاعه $(-1; 2)$ و \bar{W} 2- التحاكي الذي نسبته $\frac{2}{3}$ و مركزه $\Omega(3; -1)$

3- الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه $\Omega(1; -1)$.

التمرين 17 :

باستعمال الشكل الأسّي :

1- أحسب : $Z_1 = (-\sqrt{3} + i)^{2007}$ و اكتبه على الشكل الجبري

2- أحسب العدد : $Z_2 = \frac{i}{2 - 2i\sqrt{3}}$

و اكتبه على الشكل الجبري .

التمرين 18 :

(A, B, C) ثلاث نقط لواحقها على الترتيب : $Z_A = 1 + i$; $Z_B = 3 + i$; $Z_C = 1 + 3i$

1- أحسب طويلة العدد المركب : $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ 2- ماهي طبيعة المثلث ABC .

التمرين 19 :

نمبر النقطتان A و B ذات اللاحقتين i و $-i$ على الترتيب.

نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = \frac{Z+i}{Z-i}$

نضع : $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

(1) أحسب x' و y' بدلالة x و y (2) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي.

(3) عين مجموعة النقط M بحيث Z' تخيلي (صرف 4) عين مجموعة النقط M بحيث :

$$|Z'| = 1$$

(5) عين مجموعة النقط M بحيث تكون $\arg(Z') = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

التمرين 20 :

نعتبر العدد المركب : $Z' = \frac{1-2Z}{iZ+i}$ حيث Z عدد مركب يختلف عن -1 .

نفرض النقطة M لاحقة Z . باستعمال خواص المرافق و دون استعمال الشكل الجبري عين مجموعة النقط M بحيث : (1) Z' حقيقي . (2) Z' تخيلي صرف .

التمرين 21 :

ليكن Z_1, Z_2, Z_3 ثلاث أعداد مركبة حيث : $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = -8$.

عند الأعداد Z_1, Z_2, Z_3 تشكل حدود متتالية حسابية أساسها $\frac{\pi}{6}$ وطويلاتها تشكل حدود

متتالية هندسية أساسها $\sqrt{2}$. إذا علمت أن عمدة Z_1 تنتمي إلى $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

أحسب Z_1, Z_2, Z_3 .

التمرين 22 :

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب a, b, c حيث :

$$c = 2 - 2i ; b = 2i ; a = 3 + i$$

1- أحسب $\frac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC وبين أن C هي صورة B بتحويل يطلب إعطاء عناصره المميزة

2- نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة $Z' = 1 - 3i$

(أ) أحسب لاحقة النقطة D صورة B بواسطة f (ب) ماهي طبيعة الرباعي ABC .

(ج) فسر هندسيا طبيعة التحويل f .

التمرين 23 :

Z عدد مركب حيث : $Z = 1 + \cos\alpha + i \sin\alpha$ مع α عدد حقيقي من المجال

$[0; 2\pi[$. عين حسب قيم α الشكل المثلثي للعدد المركب Z .

التمرين 24 :

حل في \mathbb{C} المعادلة : $2Z + 3\bar{Z} - 2i - 10 = 0$

نفرض Z_0 حل المعادلة . أحسب طولها و عمدة Z_0 .

لتكن النقطتان M و M' اللتان لاحقتاهما Z_0 و \bar{Z}_0 . ماهي طبيعة المثلث OMM' .

التمرين 25 :

تعطى المعادلة : $Z^2 - 2(\alpha + i\beta)Z - 2 - 2i = 0$: α و β عدنان حقيقيان .

Z_1 و Z_2 حلتي المعادلة ، و هما لاحقتي النقطتين M_1 و M_2 على الترتيب

ليكن العدد المركب : $\gamma = \alpha + i\beta$. نفرض أن γ لاحقة النقطة N .

عين مجموعة النقط N عندما يكون ميل المستقيم (M_1, M_2) مساويا إلى 1 :

(يطلب فقط إعطاء علاقة بين a و b)

الحلول

التمرين 1 :

(1)	<input checked="" type="checkbox"/>	(2)	<input checked="" type="checkbox"/>	(3)	<input checked="" type="checkbox"/>	(4)	<input checked="" type="checkbox"/>
(5)	<input checked="" type="checkbox"/>	(6)	<input checked="" type="checkbox"/>	(7)	<input checked="" type="checkbox"/>	(8)	<input checked="" type="checkbox"/>
(9)	<input checked="" type="checkbox"/>	(10)	<input checked="" type="checkbox"/>	(11)	<input checked="" type="checkbox"/>	(12)	<input checked="" type="checkbox"/>
(13)	<input checked="" type="checkbox"/>	(14)	<input checked="" type="checkbox"/>	(15)	<input checked="" type="checkbox"/>	(16)	<input checked="" type="checkbox"/>
(17)	<input checked="" type="checkbox"/>	(18)	<input checked="" type="checkbox"/>	(19)	<input checked="" type="checkbox"/>	(20)	<input checked="" type="checkbox"/>
(21)	<input checked="" type="checkbox"/>	(22)	<input checked="" type="checkbox"/>				

التمرين 2 :

أعطين لواحقي الأشعة :

• لاحقة \overline{AB} هي $Z_B - Z_A$ أي : $1 - i - 2i$ أي $1 - 3i$

• لاحقة \overline{AC} هي $Z_C - Z_A$ أي : $3 - 2i$

• لاحقة \overline{BC} هي $Z_C - Z_B$ أي : $2 - i$

(أ) نعین لاحقة D :

بما أن الرباعي متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $\overline{AD} = \overline{BC}$ وعليه :

- تعيين لاحقة المركز I :

$$Z_1 = \frac{Z_A + Z_B + Z_C + Z_D}{4} = \frac{2i + 1 - i + 3 + 2 + i}{4}$$

$$Z_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{أي} \quad Z_1 = \frac{6}{4} + \frac{2i}{4}$$

التمرين 3 :

(1) تعيين (E_1) : نفرض $Z = ki$

$$\text{إذن : } Z = k \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{أي} \quad Z = k e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{حيث : } k \in \mathbb{R}_+$$

وعليه (E_1) هي نصف محور الترتيب (OY)

(2) تعيين (E_2) : نفرض $Z = k(1 + \sqrt{3}i)$

$$\text{ومنه : } Z = k \cdot 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{وعليه : } Z = 2k e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه (E_2) دائرة مركزها O ونصف قطرها $2k$.

التمرين 4 :

تعيين x .

(1) $Z \in \mathbb{R}$ معناه $\text{Im}(Z) = 0$ ومنه $2(1 - x^2) = 0$ وعليه : $1 - x^2 = 0$

وبالتالي : $x = 1$ أو $x = -1$

(2) $Z = \bar{Z}$ وعليه $\text{Re}(Z) = 0$ وبالتالي : $1 - x = 0$ ومنه $x = 1$

(3) $\text{Re}(Z) = 4$ معناه : $1 - x = 4$ ومنه $x = -3$

(4) $\text{Im}(Z) = 2$ معناه : $2(1 - x^2) = 2$ ومنه : $1 - x^2 = 1$

وعليه : $x^2 = 0$ وبالتالي : $x = 0$.

(5) $Z = 0$ معناه : $\text{Re}(Z) = 0$ و $\text{Im}(Z) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{و} \\ (1 - x)(1 + x) = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه : } \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 2(1 - x^2) = 0 \end{cases}$$

إذن : $x = 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{و} \\ x = 1 \text{ أو } x = -1 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

(6) $Z = 1 + i$ معناه $\text{Re}(Z) = 1$ و $\text{Im}(Z) = 1$

$$\text{وبالتالي : } \begin{cases} 1 - x = 1 \\ 2(1 - x^2) = 1 \end{cases} \quad \text{ومنه : } \begin{cases} x = 0 \\ \text{و} \\ 2 = 1 \end{cases} \quad \text{مستحيل}$$

التمرين 5 :

1- كتابة الأعداد المركبة المعطاة على الشكل المثلثي :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{لدينا : } |Z_1| = 2\sqrt{2} \quad \text{وعليه :}$$

$$\text{ومنه : } \theta_1 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{أي : } \arg(Z_1) = \frac{-\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه : } |Z_2| = 6 \quad \text{أي} \quad \theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \sin \theta_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه : } |Z_3| = 8 \quad \text{إذن : } \theta_3 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(Z_3) = \frac{7\pi}{6}$$

وبالتالي :

$$Z_1 = 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$Z_2 = 6 \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right] \quad , \quad Z_3 = 8 \left[\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right]$$

$$|Z_1| = 2\sqrt{2} \times 6 = 12\sqrt{2} \quad \text{و} \quad |Z_2| = 6 \times 8 = 48$$

إذن: $Z_3^4 = 4096 \left[\cos \frac{14\pi}{3} + i \sin \frac{14\pi}{3} \right] = 4096 \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right]$
(2) حساب المرافق :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2Z_1 \cdot Z_2}{iZ_3} \right) &= \frac{2\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{i \cdot Z_3} = \frac{2\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{-i Z_3} = \frac{2(2+2i)(-3-3i\sqrt{3})}{-i(-4\sqrt{3}+4i)} \\ &= \frac{12(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))}{4+4i\sqrt{3}} \\ &= \frac{3[-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})]}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{3[(-1+\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})]}{4} \\ &= \frac{3[-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i-i-\sqrt{3}-i\sqrt{3}-3]}{4} \\ &= \frac{3(-4-4i)}{4} = -3-3i \end{aligned}$$

المبرين 6 :

معالجة الأعداد المركبة على الشكل الأسّي : $Z_1 \cdot Z_2 = 12 e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4})} = 12 e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 12 e^{i\frac{5\pi}{4}} \cdot \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 12\sqrt{2} e^{i(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = 12\sqrt{2} e^{i\pi}$

$\frac{Z_2^2}{Z_1} = \frac{(4 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}})^2}{3e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{16 e^{i\pi}}{3 e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{16}{3} \cdot e^{i(\pi - \frac{3\pi}{4})} = \frac{16}{3} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\frac{Z_3^5}{Z_2^4} = \frac{(\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}})^5}{(2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}})^4} = \frac{4\sqrt{2} e^{-i\frac{5\pi}{2}}}{81 e^{i3\pi}} = \frac{4\sqrt{2}}{81} \cdot e^{-i\frac{5\pi}{2} - i3\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{81} \cdot e^{-i\frac{11\pi}{2}}$

وعليه : $Z_1 Z_2 = 12\sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right]$

$\arg(Z_2^2) = 2\arg(Z_2) = \frac{4\pi}{3}$ و $|Z_2^2| = (6)^2 = 36$

إذن : $Z_2^2 = 36 \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right]$

$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{-\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-11\pi}{12}$ و $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

ومنه : $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\cos\left(\frac{-11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right) \right]$

$|Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3| = 2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 8 = 96\sqrt{2}$

$\arg(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3) = \frac{-\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$

ومنه : $Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = 96\sqrt{2} \left[\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right]$

$\left| \frac{Z_2^2}{Z_1 \cdot Z_3} \right| = \frac{|Z_2^2|}{|Z_1 \cdot Z_3|} = \frac{36}{2\sqrt{2} \cdot 8} = \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$

$\arg\left(\frac{Z_2^2}{Z_1 \cdot Z_3}\right) = \arg(Z_2^2) - \arg(Z_1 \cdot Z_3)$

$= 2\arg(Z_2) - (\arg(Z_1) + \arg(Z_3))$

$= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

$\frac{Z_2^2}{Z_1 \cdot Z_3} = \frac{9\sqrt{2}}{8} \left[\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right]$

وعليه :

$|Z_3^4| = |Z_3|^4 = (8)^4 = 4096$

$\arg(Z_3^4) = 4\arg(Z_3) = 4 \cdot \frac{7\pi}{6} = \frac{14\pi}{3}$

3) استنتاج حلول المعادلة : $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$
 من (1) حلول المعادلة $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ هي : $-1, i, -i$
 التمرين 10 :

1- حساب : $(\sqrt{3} - 1)^2$

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + (1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

2. المعادلة (1) :

$$\Delta = [\sqrt{3} + 1 + 2i]^2 - 4 [\sqrt{3} - 1 + i (\sqrt{3} + 1)]$$

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2 + 2(\sqrt{3} + 1) \cdot 2i + (2i)^2 - 4(\sqrt{3} - 1) - 4i(\sqrt{3} + 1)$$

$$\Delta = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3}i + 4i - 4 - 4\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3} - 4i$$

$$\Delta = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$$

وبما جذر Δ هو $\sqrt{3} - 1$ وبالتالي للمعادلة حلين متمميزين :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3} + 1 + 2i + \sqrt{3} - 1}{2} = \sqrt{3} + i \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{\sqrt{3} + 1 + 2i - (\sqrt{3} - 1)}{2} = 1 + i$$

$$|Z_1| > |Z_2|$$

أدناه Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي :

$$\arg(Z_2) = \frac{\pi}{4} \quad \text{إذن} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad |Z_2|$$

$$\arg(Z_1) = \frac{\pi}{6} \quad \text{وعليه} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad |Z_1|$$

$$Z_1 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right] \quad \text{و} \quad Z_2 = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

التمرين 7 :
 لدينا : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$ (1)
 $\cos\theta - i \sin\theta = e^{-i\theta}$ (2)

• نجمع (1) و (2) نجد : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ ومنه : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

• بطرح (2) من (1) نجد : $2i \sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ ومنه : $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

التمرين 8 :

• حساب : $(\cos\theta + i \sin\theta)^4$

(1) بطريقة موافر : $(\cos\theta + i \sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$
 (2) بدستور ثنائي الحد :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^4 = \sum_{p=0}^4 C_4^p (\cos\theta)^{4-p} \cdot (i \sin\theta)^p$$

$$= C_4^0 (\cos\theta)^4 \cdot (i \sin\theta)^0 + C_4^1 (\cos\theta)^{4-1} \cdot (i \sin\theta)^1 + C_4^2 (\cos\theta)^{4-2} \cdot (i \sin\theta)^2$$

$$+ C_4^3 (\cos\theta)^{4-3} \cdot (i \sin\theta)^3 + C_4^4 (\cos\theta)^{4-4} \cdot (i \sin\theta)^4$$

$$= \cos^4\theta + 4i \cos^3\theta \sin\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta - 4i \cos\theta \sin^3\theta + \sin^4\theta$$

$$= (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta) + i (\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta)$$

الاستنتاج : من (1) و (2) نستنتج أن : $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta$
 $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta \sin\theta - 4\cos\theta \sin^3\theta$

التمرين 9 :

(1) حل المعادلة : $Z^4 = 1$

أي : $Z^4 - 1 = 0$ وهي تكافئ : $(Z^2 - 1)(Z^2 + 1) = 0$

وعليه $Z^2 - 1 = 0$ أو $Z^2 + 1 = 0$ أي : $Z^2 = 1$ أو $Z^2 = -1$ أي

$Z = 1$ أو $Z = i^2$ ومنه : $Z = 1$ أو $Z = -1$ أو $Z = i$ أو $Z = -i$

مجموعة الحلول : $S = \{1, -1, i, -i\}$

(2) النشر :

(1) $(Z^3 + Z^2 + Z + 1) = Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z - Z^3 - Z^2 - Z - 1 = Z^4 - 1$

المبرين 11 :

1- حساب $|Z|$ و $\arg(Z)$ بوضع : $Z_1 = \sqrt{3} + i$ و $Z_2 = 1 - i$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ ومنه : } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ و } |Z_1| = 2$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{4} \text{ ومنه : } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ و } |Z_2| = \sqrt{2}$$

$$|Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\arg(Z) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

(ملاحظة Z على الشكل الجبري :

$$Z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \times \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - 1}{2}$$

$$Z = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ و } \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

4- استنتاج طويلة وعمدة Z_1, Z_2 :

$$\arg(Z_1 \cdot Z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}, |Z_1 \cdot Z_2| = 2\sqrt{2}$$

5- تعيين قيم n :

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right] \text{ لدينا :}$$

$$\frac{Z_1 \cdot Z_2}{2\sqrt{2}} = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \text{ ومنه :}$$

$$\left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{2\sqrt{2}} \right)^n = \cos \frac{5\pi n}{12} + i \sin \frac{5\pi n}{12} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{5\pi n}{12} = 0 \\ \cos \frac{5\pi n}{12} > 0 \end{cases} \text{ تكافئ : } \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{2\sqrt{2}} \right)^n \in \mathbb{R}_+$$

$$k \in \mathbb{N}, \frac{5\pi n}{12} = 0 + 2k\pi \text{ ومنه :}$$

$$\text{ومنه : } 5\pi n = 24k\pi \text{ أي } 5n = 24k \text{ إذن : } n = \frac{24k}{5} \text{ حيث :}$$

$$\alpha \in \mathbb{N}, k = 5\alpha \text{ أي أن : } n = 24\alpha \text{ مع } \alpha \in \mathbb{N}$$

5- التحقق من أن : $|a| = |b| = 1$

$$|b| = \left| \frac{Z_2}{\sqrt{2}} \right| = \frac{|Z_2|}{\sqrt{2}} = 1, |a| = \left| \frac{Z_1}{2} \right| = \frac{|Z_1|}{2} = 1$$

$$\bar{C} = \left(\frac{a+b}{1+ab} \right) = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{1 + \bar{a} \cdot \bar{b}} \text{ حساب } \bar{C} \text{ بدلالة } a \text{ و } b$$

$$\bar{a} = \frac{1}{a} \text{ و } \bar{b} = \frac{1}{b} \text{ فإن : } |a| = |b| = 1 \text{ وبما أن}$$

$$\bar{C} = \frac{b+a}{ab+1} \text{ أي : } \bar{C} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{ab+1}{ab}} \text{ ومنه :}$$

$$\bar{C} = \frac{b+a}{ab+1}$$

1- تبين أن $p(Z)$ يقبل جذر حقيقي α :
ضع $Z = \alpha$ ولدينا : $p(\alpha) = 0$ ومنه :

$$4\alpha^3 - 6i\sqrt{3}\alpha^2 - 3(3 + i\sqrt{3})\alpha - 4 = 0$$

$$4\alpha^3 - 6i\sqrt{3}\alpha^2 - 9\alpha - 3i\sqrt{3}\alpha - 4 = 0$$

$$4\alpha^3 - 9\alpha - 4 - i(6\sqrt{3}\alpha^2 + 3\sqrt{3}\alpha) = 0$$

$$4\alpha^3 - 9\alpha - 4 - 3\sqrt{3}i(2\alpha^2 + \alpha) = 0$$

$$\begin{cases} 4\alpha^3 - 9\alpha - 4 = 0 \dots (1) \\ 2\alpha^2 + \alpha = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ أو } \alpha = 0 \text{ إذن } 2\alpha^2 + \alpha = 0 : (2) \text{ حل}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ مقبول ومنه } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ نجد (1) في (1) نجد :}$$

$$p(Z) = (Z - \alpha)(aZ^2 + bZ + c) : c, b, a \text{ معين}$$

$$p(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - a\alpha Z^2 - b\alpha Z - \alpha C \text{ إذن :}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ لكن } \begin{cases} a=4 \\ b-a\alpha=-6i\sqrt{3} \\ c-b\alpha=-9-3i\sqrt{3} \\ -a\alpha=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b+2=-6i\sqrt{3} \\ c+\frac{1}{2}b=-9-3i\sqrt{3} \\ +\frac{1}{2}c=-4 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} a=4 \\ b=-2-6i\sqrt{3} \\ c=-8 \end{cases}$$

$$p(Z) = \left(Z + \frac{1}{2}\right) [4Z^2 - (2 + 6\sqrt{3}i)Z - 8]$$

$$4- \text{تعيين } n : \text{ لدينا : } Z = \sqrt{2} \left[\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right]$$

$$\text{ومنه : } \frac{Z}{\sqrt{2}} = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n = \cos \frac{5\pi n}{12} + i \sin \frac{5\pi n}{12} \text{ ومنه :}$$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ومنه : } \cos \frac{5\pi}{12} = 0 \text{ معناه : } \operatorname{Im} \left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$$

$$\text{إذن : } 5\pi n = 6\pi + 12k\pi \text{ ومنه : } 5n = 6 + 12k$$

$$\frac{n}{6} = \frac{1+2k}{5} = \alpha \text{ ومنه : } 5n = 6(1+2k) \text{ اي :}$$

$$\frac{n}{6} = \alpha \text{ وعليه : } \alpha \in \mathbb{N} \text{ مع } n = 6\alpha \text{ اي}$$

التمرين 12 :

$$\Delta = (4i - 3)^2 - 4i(i - 5) \text{ حل المعادلة :}$$

$$\Delta = -3 - 4i \text{ إذن : } \Delta = -16 - 24i + 9 + 4 + 20i \text{ أي } \Delta = -3 - 4i$$

نحسب جذري Δ : نفرض δ جذر تربيعي للعدد

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -3 \dots (1) \\ 2\alpha\beta = -4 \dots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \dots (3) \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} \Delta = \delta^2 \\ |\Delta| = |\delta^2| \end{cases} \text{ ولدينا : } \delta = \alpha + i\beta$$

$$\text{وبجمع (1) و (3) نجد } 2\alpha^2 = 2 \text{ وعليه } \alpha^2 = 1 \text{ ومنه } \alpha = 1 \text{ أو } \alpha = -1$$

$$\text{نعوض في (2) : } \alpha = 1 \text{ : } \beta = -2 \text{ ولما } \alpha = -1 \text{ : } \beta = 2$$

$$\text{ومنه : جذري } \Delta \text{ هما : } \delta_1 = 1 - 2i \text{ و } \delta_2 = -1 + 2i$$

وعليه للمعادلة حلين : Z_1 و Z_2 :

$$Z_2 = \frac{-4i + 3 + 1 - 2i}{2i} \text{ و } Z_1 = \frac{-4i + 3 - 1 + 2i}{2i}$$

$$Z_2 = \frac{-6i + 4}{2i} = \frac{-3i + 2}{i} \text{ و } Z_1 = \frac{-2i + 2}{2i} = \frac{-i + 1}{i}$$

$$Z_2 = \frac{(-3i + 2)(-i)}{i(-i)} = -3 - 2i \text{ و } Z_1 = \frac{(-i + 1)(-i)}{i(-i)} = -1 - i$$

3- حل المعادلة $p(Z) = 0$

$$p(Z) = 0 \text{ تكافئ } 4Z^2 - (2 + 6\sqrt{3}i)Z - 8 = 0 \text{ أو } Z + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{ومنه } Z = -\frac{1}{2} \text{ أو } 4Z^2 - 2(1 + 3\sqrt{3}i)Z - 8 = 0$$

$$\Delta = (1 + 3\sqrt{3}i)^2 - 4(2)(-4) \text{ ومنه } 2Z^2 - (1 + 3\sqrt{3}i)Z - 4 = 0$$

$$\Delta = 6(1 + \sqrt{3}i) \text{ أي أن } \Delta = 1 + 6\sqrt{3}i - 27 + 32 = 6 + 6\sqrt{3}i \text{ وعليه } \Delta = 6(1 + \sqrt{3}i)$$

حساب الجذرين التربيعيين للعدد $1 + \sqrt{3}i$

$$\delta^2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ نفرض } \delta \text{ جذر تربيعي لـ } 1 + \sqrt{3}i \text{ فيكون } \delta^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{وليكن } \delta = \alpha + i\beta \text{ ومنه } \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 \dots (1) \\ 2\alpha\beta = \sqrt{3} \dots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2 \dots (3) \end{cases} \text{ نجمع (1) و (3) نجد : } 2\alpha^2 = 3$$

$$\text{ومنه } \alpha^2 = \frac{3}{2} \text{ وعليه } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ أو } \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

بالتعويض في (2) :

$$\text{لما } \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ فإن } \beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \text{ أي } \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{لما } \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ فإن } \beta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ومنه يوجد جذرين } \delta_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \delta_2 = \frac{-\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ومنه جذري } \Delta \text{ هما : } \sqrt{6} \cdot \delta_1 \text{ و } \sqrt{6} \cdot \delta_2 \text{ وعليه الجذرين هما : } 3 + i\sqrt{3} \text{ و } -3 - i\sqrt{3}$$

$$\text{وبالتالي للمعادلة حلين متمايزين. } Z_1 = \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 3 - i\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{و } Z_2 = \frac{1 + 3\sqrt{3}i + 3 + i\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{إن : } Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \text{ و } Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, 1 + i\sqrt{3} \right\} \text{ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة الأولى هي :}$$

1- حساب :

$$(1 - 2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$$

$$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$$

$$Z^2 + 6Z + 25 = 0 \text{ حل المعادلة :}$$

$$\Delta' = (3)^2 - 25 = -16 \text{ أي } \Delta' = 16i^2 \text{ ومنه للمعادلة حلين هما :}$$

$$Z_1 = -3 - 4i \text{ و } Z_2 = -3 + 4i$$

$$t^4 + 6t + 25 = 0 \text{ حل المعادلة :}$$

$$\text{نضع } t^2 = Z \text{ نجد : } Z^2 + 6Z + 25 = 0 \text{ وحليها : } Z_1 = -3 - 4i \text{ و } Z_2 = -3 + 4i$$

$$\text{ومنه : } t^2 = -3 - 4i \text{ و } t^2 = -3 + 4i$$

$$\text{من (1) : } t^2 = (1 - 2i)^2 \text{ أو } t^2 = (1 + 2i)^2$$

$$\text{عليه : } t = 1 - 2i \text{ أو } t = -1 + 2i \text{ أو } t = 1 + 2i \text{ أو } t = -1 - 2i$$

$$\text{عليه مجموعة الحلول : } S = \{-1 - 2i, 1 + 2i, -1 + 2i, 1 - 2i\}$$

هذه طبيعة f

$$1) Z' - 1 - 2i = Z$$

$$\text{لها : } Z' = Z + 1 + 2i \text{ ومنه f انسحاب شعاعه } \bar{W} (1; 2)$$

$$2) Z' = (1 + \sqrt{2})Z - 4i + 4\sqrt{2}$$

$$\text{ومنه : } Z' = aZ + b \text{ حيث } a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$$Z_0 = \frac{b}{1-a} \text{ طاقه / تحاكي نسبته a أي } 1 + \sqrt{2} \text{ ومركزه النقطة } \Omega \text{ ذات اللاحقة}$$

$$Z_0 = \frac{-4i + \sqrt{2}}{1 - 1 - \sqrt{2}} \text{ ومنه : } Z_0 = \frac{-4i + \sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$

$$Z_0 = -1 + 2i\sqrt{2} \text{ وعليه : } Z_0 = \frac{4i\sqrt{2} - 2}{2}$$

وعليه : $b = 1 - \frac{1}{3}i$ وبالتالي $Z' = \frac{2}{3}Z + 1 - \frac{1}{3}i$

حيث : $Z' = aZ + b$ $a = e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $\frac{b}{1-a} = 1-i$

وعليه : $\frac{b}{1-a} = 1-i$ إذن : $b = (1-i) \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

وبالتالي : $b = 1-i - e^{i\frac{\pi}{4}} + i e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ومنه : $b = 1-i - \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$b = 1-i - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2} - i$

ومنه : $Z' = e^{i\frac{\pi}{4}} Z + 1 - \sqrt{2} - i$

الممرين 17 :

1) لدينا : $|- \sqrt{3} + i| = 2$ ، فإذا كانت $\arg(-\sqrt{3} + i) = \theta$

فإن : $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ومنه : $\theta = \frac{5\pi}{6}$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$

$Z_1 = (-\sqrt{3} + i)^{2007} = 2^{2007} \cdot \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2007}$

$= 2^{2007} \cdot e^{i\frac{5\pi}{6} \times 2007} = 2^{2007} \cdot e^{i \cdot \frac{10035\pi}{6}}$

الحل : $\frac{10035\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 1672\pi$ أي : $\frac{10035\pi}{6} = \frac{1672 \times 6\pi + 3\pi}{6}$

وعليه : $(-\sqrt{3} + i)^{2007} = 2^{2007} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 1672\pi\right)} = 2^{2007} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

وبالتالي : $Z_1 = 2^{2007}(1) = 2^{2007}$

$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)Z - \sqrt{2} + 1 + i$

لدينا : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ، $|1-i| = \sqrt{2}$

وعليه : $\arg(1-i) = \frac{-\pi}{4}$ ومنه : $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

وعليه : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ومنه : $Z' = e^{-i\frac{\pi}{4}} Z - \sqrt{2} + 1 + i$

وبالتالي فهو من الشكل : $Z' = aZ + b$ حيث : $a = e^{i\theta}$

إذن مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $Z_0 = \frac{b}{1-a}$ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة

$Z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{-\sqrt{2} + 1 + i}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{(-\sqrt{2} + 1 + i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$Z_0 = \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1 + i + i - 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 2i)$

$Z_0 = -1 - i + i\sqrt{2} = -1 + (-1 + \sqrt{2})i$

وبالتالي : $\Omega(-1 ; -1 + \sqrt{2})$

الممرين 16 :

1) $Z' = aZ + b$ حيث $a = 1$ و $b = 2 - i$ ومنه : $Z' = Z + 2 - i$

2) $Z' = aZ + b$ حيث : $\frac{b}{1-a} = 3 - i$ و $a = \frac{2}{3}$

وعليه : $\frac{b}{1-\frac{2}{3}} = 3 - i$ إذن : $\frac{b}{\frac{1}{3}} = 3 - i$ ومنه : $3b = 3 - i$

لدينا : $\arg \left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right) = (\overline{AB}, \overline{AC})$ ومنه : $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$
وبالتالي المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.
التمرين 19 :

(1) حساب x' و y' بدلالة x و y :

$$Z' = \frac{Z+i}{Z-i}$$

$$x' + iy' = \frac{x+iy+i}{x+iy-i} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}$$

$$= \frac{x^2 - i x (y-1) + i x (y+1) + (y+1)(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + ix(-y+1+y+1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$x' + iy' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y-1)^2} \\ y' = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \end{cases} \quad \text{عليه :}$$

(1) يكون Z' حقيقي إذا وفقط إذا كان : $y' = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{وبالتالي :} \quad \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (x; y) \neq (0, 1) \end{cases} \quad \text{الآن :}$$

ومنه مجموعة النقاط M هي محور الترتيب باستثناء $\Omega(0; 1)$

(1) يكون Z' تخيلي إذا وفقط إذا كان : $x' = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \text{و} \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$Z_2 = \frac{i}{2 - 2i\sqrt{3}} \quad (2)$$

لدينا : $|i| = 1$ ، $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ ، ومنه : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

• ولدينا : $|2 - 2i\sqrt{3}| = 4$ فإذا كانت عمدة $(2 - 2i\sqrt{3})$ هي θ فإن :

$$2 - 2i\sqrt{3} = 4 e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{وبالتالي :} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ومنه :} \quad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$Z_2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{أي :} \quad Z_2 = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4 e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$Z_2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{وبالتالي :} \quad Z_2 = \frac{1}{4} e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})}$$

$$\text{إذن :} \quad Z_2 = \frac{1}{4} \left[\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6} \right]$$

$$\text{إذن :} \quad Z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8} i \quad \text{أي أن :} \quad Z_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right]$$

التمرين 18 :

$$1- \text{حساب طولية و عمدة } Z : \quad Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \quad \text{لدينا :} \quad Z = \frac{1+3i-1-i}{3+i-1-i}$$

$$\text{ومنه :} \quad Z = \frac{2i}{2} \quad \text{إذن :} \quad Z = i \quad \text{وبالتالي :} \quad |Z| = 1 \quad \text{و} \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{2}$$

2- طبيعة المثلث ABC :

$$\text{لدينا :} \quad Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \quad \text{ومنه :} \quad |Z| = \frac{|Z_C - Z_A|}{|Z_B - Z_A|} \quad \text{إذن :} \quad |Z| = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{لكن :} \quad |Z| = 1 \quad \text{ومنه :} \quad \frac{AC}{AB} = 1 \quad \text{أي أن :} \quad AC = AB$$

مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 باستثناء النقطة $\Omega(0; 1)$

$$(4) \text{ يكون } Z' = 1 \text{ إذا كان : } \left| \frac{Z+i}{Z-i} \right| = 1 \text{ ومنه : } \left| \frac{Z+i}{Z-i} \right| = 1$$

$$\text{أي أن : } \frac{BM}{AM} = 1 \text{ إذن : } BM = AM \text{ أي } MA = MB$$

إذن مجموعة النقط M هي محور [AB] وهو محور الفواصل.

$$(5) \text{ يكون } \arg(Z') = \frac{\pi}{4} \text{ إذا وفقط إذا كان : } x' = y'$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 2x \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$$

$$\text{ومنهم : } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$$

$$D(1; 0) \text{ ونصف القطر } \sqrt{2} \text{ باستثناء } \Omega(0; 1)$$

التمرين 20 :

تعيين مجموعة النقط :

$$(1) \text{ حقيقي معناه : } Z' = \overline{Z'} \text{ وعليه}$$

$$\frac{1-2Z}{iZ+i} = \frac{1-2\overline{Z}}{-i\overline{Z}-i} \text{ وعليه : } (1-2Z)(-i\overline{Z}-i) = (1-2\overline{Z})(i\overline{Z}+i)$$

$$iZ - i + 2iZ\overline{Z} + 2iZ = i\overline{Z} + i - 2iZ\overline{Z} - 2i\overline{Z}$$

$$iZ - i + 2iZ\overline{Z} + 2iZ - i\overline{Z} - i + 2iZ\overline{Z} + 2i\overline{Z} = 0$$

$$i(\overline{Z} + Z) + 4iZ\overline{Z} - 2i = 0 \text{ ومنه } iZ - 2i + 4iZ\overline{Z} + i\overline{Z} = 0$$

$$\text{وعليه : } i[\overline{Z} + Z + 4Z\overline{Z} - 2] = 0 \text{ إذن : } Z + \overline{Z} + 4Z\overline{Z} - 2 = 0$$

$$\text{وبالتالي : } 2x + 4(x^2 + y^2) - 2 = 0 \text{ حيث } x \text{ و } y \text{ هما إحداثي } M \text{ وعليه :}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - \frac{1}{2} = 0 \text{ أي أن : } \frac{1}{2}x + x^2 + y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

وبالتالي:

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16} \text{ إذن : } \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

ومنهم مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز $\Omega\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$ ونصف القطر $\frac{3}{4}$ باستثناء النقطة

$$D(-1; 0)$$

$$(2) \text{ تخيلي صرف يكفي : } Z' + \overline{Z'} = 0$$

$$\text{وعليه : } \frac{1-2Z}{iZ+i} + \frac{1-2\overline{Z}}{-i\overline{Z}-i} = 0 \text{ إذن : } \frac{1-2Z}{iZ+i} - \frac{1-2\overline{Z}}{i\overline{Z}+i} = 0$$

$$\text{ومنهم : بعد الجمع نجد : } 3i(\overline{Z}-Z) = 0 \text{ و } Z \neq -1$$

$$\text{ومنهم : } \overline{Z} - Z = 0 \text{ و } Z \neq -1 \text{ أي أن : } y = 0 \text{ حيث : } (x; y) \neq (-1; 0)$$

ومنهم مجموعة النقط من محور الفواصل باستثناء النقطة $\Omega(-1; 0)$

التمرين 21 :

لنرّض $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ عداد الأعداد المركبة Z_1, Z_2, Z_3 على الترتيب فيكون :

$$\theta_3 = \theta_1 + 2 \cdot \frac{\pi}{6} \text{ و } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{أي : } \theta_3 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} \text{ و } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{لأن } \arg(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3) = \pi \text{ لأن : } Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 = -8$$

$$\text{وعليه : } \arg(Z_1) + \arg(Z_2) + \arg(Z_3) = \pi$$

$$\text{ومنهم : } \theta_1 + \theta_1 + \frac{\pi}{6} + \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \pi \text{ إذن : } 3\theta_1 = 0$$

$$\text{ومنهم : } \theta_1 = 0 \text{ وعليه : } \theta_2 = \frac{\pi}{6}, \theta_3 = \frac{\pi}{3}$$

ولنرّض ρ_1, ρ_2, ρ_3 طويلات الأعداد Z_1, Z_2, Z_3 على الترتيب

$$\text{فنعلمون : } \rho_2 = \rho_1 \sqrt{2} \text{ و } \rho_3 = \rho_1 (\sqrt{2})^2 \text{ ومنهم } \rho_3 = 2\rho_1$$

$$\text{أي : } |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot |Z_3| = 8 \text{ ومنهم : } |Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3| = |-8| = 8$$

$$\rho_1^3 = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ وبالتالي : } \rho_1 \cdot \rho_1 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\rho_1 = 8$$

$$DB = \sqrt{10} \text{ : ومنه } Z_B - Z_D = 1 + 3i$$

إن كل أضلاع الرباعي ABDC متقايسة و لدينا $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه الرباعي ABDC مربع.

(ج) التفسير الهندسي لطبيعة f:

لدينا $\overline{BD} = \overline{AC}$ وعليه: f انسحاب شعاعه \overline{AC} ذو اللاحقة $-1 - 3i$.

التمرين 23 :

تعيين الشكل المثلثي للعدد Z : $Z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$

لدينا : $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ و $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

$$Z = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$Z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right]$$

• إذا كان : $0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ أي $0 \leq \alpha < \pi$ فإن $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$

ومنه الشكل المثلثي للعدد Z هو : $Z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right]$

• إذا كان : $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ أي $\alpha = \pi$ فإن $Z = 0$ ومنه ليس له شكلا مثلثيا.

• إذا كان : $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ أي $\pi < \alpha < 2\pi$ فإن $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$

$$Z = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[-\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$Z = -2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[-\cos \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

و هو الشكل المثلثي للعدد Z لأن : $-2 \cos \frac{\alpha}{2} > 0$

أي : $\rho_1^3 = (\sqrt{2})^3$ ومنه : $\rho_1 = \sqrt{2}$ و $\rho_2 = 2$ و $\rho_3 = 2\sqrt{2}$

إن : $Z_1 = \sqrt{2} [\cos 0 + i \sin 0]$ أي $Z_1 = \sqrt{2}$

$$Z_2 = \sqrt{3} + i \text{ أي } Z_2 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$Z_3 = \sqrt{2} + \sqrt{6} i \text{ أي } Z_3 = 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]$$

التمرين 22 :

$$1 - \text{حساب } \frac{c-a}{b-a}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{2-2i-3-i}{2i-3-i} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3+i)} = \frac{3+i+9i-3}{10} = i$$

$$\frac{c-a}{b-a} = i \text{ : إذن}$$

طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1$ ومنه : $\frac{AC}{AB} = 1$ أي : $AC = AB$

ولدينا : $\arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه : $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

لدينا : $\left\{ \begin{array}{l} AC = AB \\ (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$ ومنه الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى C

2- (أ) حساب لاحقة D :

لدينا : $f(B) = D$ ومنه : $Z_D = Z_B - 1 - 3i$ أي : $Z_D = 2i - 1 - 3i$

إن : $Z_D = -1 - i$

(ب) طبيعة الرباعي ABDC :

لدينا : $Z_B - Z_A = -3 + i$ ومنه : $AB = \sqrt{10}$

ولدينا : $Z_D - Z_C = -3 + i$ ومنه : $CD = \sqrt{10}$ إن : $AB = CD$

وكذلك : $Z_A - Z_C = 1 + 3i$ ومنه : $CA = \sqrt{10}$

التمرين 24 :

حل المعادلة : $2Z + 3\bar{Z} - 2i - 10 = 0$

بوضع $Z = x + iy$ نجد : $\bar{Z} = x - iy$

وبالتعويض في المعادلة نجد : $2(x + iy) + 3(x - iy) - 2i - 10 = 0$

إذن : $2x + 2iy + 3x - 3iy - 2i - 10 = 0$

أي : $5x - 10 - i(y + 2) = 0$ ومنه : $5x - 10 - iy - 2i = 0$

$$Z_0 = 2 - 2i \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} 5x - 10 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{وعليه}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{فيكون} \quad Z_0 \text{ عمدة } \theta \quad |Z_0| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ومنه} : \theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

ومنه عمدة Z_0 هي : $\frac{-\pi}{4}$ لدينا : عمدة \bar{Z}_0 هي $\frac{\pi}{4}$ و $|\bar{Z}_0| = 2\sqrt{2}$

وعليه : $|\bar{Z}_0| = |\bar{Z}_0| = 2\sqrt{2}$ وبالتالي : $OM' = OM$

$$(\overline{OM'} ; \overline{OM}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه} \quad \frac{Z_0 - 0}{\bar{Z}_0 - 0} = -i \quad \text{أي} \quad \frac{Z_0 - 0}{\bar{Z}_0 - 0} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i}$$

إذن المثلث OMM' قائم في O ومتساوي الساقين .

التمرين 25 :

بما أن Z_1 و Z_2 حلي المعادلة فإن : $Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$

$$Z_1 + Z_2 = 2(\alpha + i\beta) \quad \text{أي} \quad Z_1 + Z_2 = \frac{2(\alpha + i\beta)}{1}$$

وكذلك : $Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$ أي : $Z_1 Z_2 = -2 - 2i$

بما أن ميل المستقيم $(M_1 M_2)$ يساوي 1 فإن : $(M_1 M_2)$ ينطبق على المنصف الأول.

لكن الشعاع $\overline{M_1 M_2}$ هو صورة $Z_1 - Z_2$ ومنه عمدة : $(Z_2 - Z_1)$ هي $\frac{\pi}{4}$.

وبالتالي : $\arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\pi}{4}$ ومنه : $2\arg(Z_2 - Z_1) = \frac{\pi}{2}$

أي أن : $\arg(Z_2 - Z_1)^2 = \frac{\pi}{2}$ ومنه : $\arg[Z_2^2 - 2Z_1 Z_2 + Z_1^2] = \frac{\pi}{2}$

أي : $\arg[Z_2^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_1^2 - 4Z_1 Z_2] = \frac{\pi}{2}$

وعليه : $\arg[(Z_2 + Z_1)^2 - 4Z_1 Z_2] = \frac{\pi}{2}$

أي : $\arg[(2\alpha + 2i\beta)^2 + 8 + 8i] = \frac{\pi}{2}$

$\arg[4\alpha^2 + 8i\alpha\beta - 4\beta^2 + 8 + 8i] = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $\arg[4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8 + 8i(\alpha\beta + 1)] = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -2 \\ \beta > -\frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 2 = 0 \\ \alpha\beta + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8 = 0 \\ \alpha\beta + 1 > 0 \end{cases}$$

يمكن حل بيانيا هذه الجملة بإنشاء البيان ذو المعادلة $x^2 - y^2 = -2$ وهو قطع زائد .

وبذلك إنشاء القطع الزائد الذي معادلته $y = \frac{-1}{x}$ ثم تعيين نقط التقاطع واستنتاج حلول الجملة.

12- التشابه المستوي المباشر

1- تعريف :

ω نقطة ثابتة. θ عدد حقيقي ، k عدد حقيقي موجب تماما

التشابه الذي مركزه ω ونسبته k وزاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق ω بنفسها

$$\begin{cases} \omega M' = k \cdot \omega M \\ \left(\overline{\omega M}, \overline{\omega M'} \right) = \theta \end{cases}$$

ويرفق بكل نقطة M تختلف عن ω النقطة M' حيث :

حالات خاصة :

• إذا كان $k = 1$ فإن التشابه هو إزاحة أي دوران إذا كانت θ غير معدومة وهو

التحويل المطابق إذا كانت $\theta = 0$

• إذا كانت $\theta = 0$ فإن التشابه هو التحاكي الذي نسبته k ومركزه ω

2- الكتابة المركبة للتشابه :

ليكن s تشابه مستوي مباشر مركزه ω ونسبته k وزاويته θ

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \omega M' = k \cdot \omega M \\ \left(\overline{\omega M}, \overline{\omega M'} \right) = \theta \end{cases} \text{ حيث } S(M) = M' \text{ نفرض } Z', Z, Z_0 \text{ نلاحظ}$$

النقط ω, M, M' على الترتيب بما أن $\omega M' = k \omega M$ فإن :

$$|Z' - Z_0| = k \cdot |Z - Z_0| \text{ ولدينا : } \left(\overline{\omega M}, \overline{\omega M'} \right) = \theta \text{ ومنه :}$$

$$\left(\overline{U}, \overline{\omega M'} \right) - \left(\overline{U}, \overline{\omega M} \right) = \theta$$

$$\arg(Z' - Z_0) - \arg(Z - Z_0) = \theta \text{ إذن : } \arg(Z' - Z_0) = \theta + \arg(Z - Z_0) \text{ وبالتالي}$$

$$\begin{cases} |Z' - Z_0| = k |Z - Z_0| \\ \arg(Z' - Z_0) = \theta + \arg(Z - Z_0) \end{cases} \text{ ومنه نستنتج أن : } Z' - Z_0 = a (Z - Z_0) \text{ حيث}$$

$$|a| = k \text{ و } \arg(a) = \theta$$

أي أن : $a = k (\cos\theta + i \sin\theta)$ ومنه الشكل العام للتشابه هو : $Z' = aZ + b$

مثال : الشكل المركب للتشابه المستوي المباشر الذي مركزه ω ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ حيث

$$\text{لاحقة } \omega \text{ هي } 2 + i \text{ هو : } Z' - (2 + i) = a [Z - (2 + i)]$$

$$\text{حيث } a = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{وبالتالي : } Z' - (2 + i) = (1 + i\sqrt{3}) [Z - (2 + i)]$$

$$Z' = (1 + i\sqrt{3}) Z - (1 + i\sqrt{3}) \cdot (2 + i) + 2 + i$$

$$Z' = (1 + i\sqrt{3}) Z - 2 + \sqrt{3} - i - 2i\sqrt{3}$$

حالات خاصة :

$$(1) \text{ إذا كان : } k = 1 \text{ و } \theta = 0 \text{ فإن : } Z' - Z_0 = Z - Z_0$$

أي : $Z' = Z$ ومنه التحويل هو التحويل المطابق

$$(2) \text{ إذا كان } k = 1 \text{ و } \theta \neq 0 \text{ فإن : } Z' - Z_0 = a(Z - Z_0)$$

حيث $a = \cos\theta + i \sin\theta$ ومنه s هو الدوران الذي مركزه ω وزاويته θ .

$$(1) \text{ إذا كان } k \neq 1 \text{ و } \theta = 0 \text{ فإن : } Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$$

حيث $k \in \mathbb{R}^+$ ومنه s هو التحاكي الذي مركزه ω ونسبه k .

الشكل الأسّي للتشابه المستوي المباشر :

المركب التشابه المستوي المباشر الذي مركزه النقطة ω ذات اللاحقة Z_0 ونسبته k وزاويته

(1) والذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z إلى النقطة M' ذات اللاحقة Z' فيكون

$$Z' - Z_0 = a(Z - Z_0) \text{ حيث : } a = k (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$\text{ومنه : } a = k \cdot e^{i\theta} \text{ وعليه : } Z' - Z_0 = e^{i\theta} \cdot (Z - Z_0)$$

الخاصية المميزة لتشابه مباشر :

أي أنه :

K عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي. يكون التحويل النقضي f تشابه مباشر نسبته k وزاويته θ إذا وفقط إذا كان: من أجل كل ثنائية نقطية $(A; M)$ صورتها $(A'; M')$ حيث $A \neq M$

$$\begin{cases} A'M' = k AM \\ \left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'} \right) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تنطبق على A' فإن: $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'} \right) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

نتيجة:

- التشابه المستوى المباشر يحافظ على نسب المسافات لأن: $\frac{A'M'}{AM} = k$

- التشابه المستوى المباشر يحافظ على الزوايا الموجهة لأن: $\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'} \right) = \theta + 2k\pi$

5- مركب تشابهين مباشرين:

نفرض S_1 تشابه مركزه ω_1 ونسبته k_1 وزاويته θ_1 و S_2 تشابه مركزه ω_2 ونسبته k_2 وزاويته θ_2 . حيث Z_0, Z'_0 لاحقتي ω_1, ω_2 . لنفرض: M, M_1, M' ثلاث نقط لواقعها Z, Z_1, Z' على الترتيب حيث $S_1(M) = M_1$ و $S_2(M_1) = M'$ أي:

$$M \xrightarrow{S_1} M_1 \xrightarrow{S_2} M'$$

$$\begin{aligned} |a_1| &= k_1 \\ \arg(a_1) &= \theta_1 \end{aligned}$$

فيكون $Z_1 - Z_0 = a_1 (Z - Z_0)$ حيث:

$$\begin{aligned} |a_2| &= k \\ \arg(a_2) &= \theta_2 \end{aligned}$$

وكذلك: $Z' - Z'_0 = a_2 (Z_1 - Z'_0)$ حيث:

$$Z' = a_2 Z_1 + (1 - a_2) Z'_0 \text{ أي } Z_1 = a_1 Z + (1 - a_1) Z_0$$

$$\text{وبالتالي: } Z' = a_2 [a_1 Z + (1 - a_1) Z_0] + (1 - a_2) Z'_0$$

$$\text{إذن: } Z' = a_2 a_1 Z + a_2 (1 - a_1) Z_0 + (1 - a_1) Z'_0$$

(1) إذا كان: $a_2 a_1 = 1$ فإن $S_2 \circ S_1$ إزاحة.

(2) إذا كان: $a_2 a_1 \neq 1$ فإن $S_2 \circ S_1$ تشابه مستوى مباشر نسبته

$$|a_2 \cdot a_1| = k_2 \cdot k_1 \text{ وزاويته } \arg(a_2 \cdot a_1) \text{ أي: } \theta_2 + \theta_1 \text{ ومركزه النقطة الصامدة } \omega.$$

6- دراسة التحويلات النقطية:

$$f: M(Z) \longrightarrow M'(Z') \text{ حيث: } Z' = aZ + b \text{ و } a \text{ و } b \text{ عدنان مركبان.}$$

(1) إذا كان $a = 1$ و $b = 0$: $f: Z' = Z$ هو التحويل المطابق

(2) إذا كان $a = 1$ و $b \neq 0$: $f: Z' = Z + b$ هو الانسحاب الذي شعاعه \overrightarrow{W} ذو اللاحقة b .

(3) إذا اكن $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$: $f: Z' = aZ + b$ هو تحاك نسبته k ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$.

(4) إذا كان $a \in \mathbb{C}$ حيث $|a| = 1$ و $\text{Im}(a) \neq 0$ فإن f دوران زاويته θ عمدة العدد المركب a

$$\frac{b}{1-a} \text{ ذات اللاحقة } \omega \text{ ومركزه النقطة}$$

(5) إذا كان $a \in \mathbb{C}$ حيث $|a| \neq 1$ و $\text{Im}(a) \neq 0$ فإن f تشابه مستوى مباشر

نسبته $k = |a|$ وزاويته θ عمدة العدد المركب a . ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$.

التمارين

التمرين 1 :

ضع العلامة \checkmark أمام كل جملة صحيحة و العلامة \times أمام كل جملة خاطئة.

(1) التشابه يحافظ على المسافات

(2) صورة دائرة بتشابه هي دائرة نقايستها

(3) كل دوران هو تشابه نسبته 1

(4) مركب تشابهين لهما نفس المركز ω هو تشابه مركزه ω

(5) مركب التشابهين $S_1 \left(\omega, \frac{\pi}{12}, 3 \right)$ و $S_2 \left(\omega, \frac{\pi}{4}, 4 \right)$ هو التشابه

$$S \left(\omega, \frac{5\pi}{12}, 12 \right)$$

(6) صورة مستقيم بتشابه هو مستقيم يوازيه

(7) يوجد تشابهين تركيبهما دوران

(8) يوجد تشابهين تركيبهما تحاكي

التمرين 2 :

S تشابه مستوى مباشر نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{6}$. ومركزه النقطة ω ذات فلاحقة

$3 + i$ لتكن M نقطة لاحقتها Z و M' صورتها بواسطة S

- عين اللاحقة Z' للنقطة M' بدلالة Z . - عين الشكل الأسلي لهذا التشابه.

- نفرض (x', y') إحداثي Z' و (x, y) إحداثي M . أكتب x', y' بدلالة x, y .

التمرين 3 :

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بالنقطة M ذات الإحداثيين (x, y) النقطة M' ذات

$$\begin{cases} x' = 4(x - y) \\ y' = 4(x + y) + 1 \end{cases} \text{ حيث } (x', y')$$

نفرض Z و Z' لاحقتي M و M' على الترتيب. أكتب Z' بدلالة Z ماهي طبيعة f

وعناصره المميزة

التمرين 4 :

f تحويل نقطي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث:

$$Z' = -2(1 + \sqrt{3}i)Z - 2 - i\sqrt{3}$$

استنتج الشكل الأسلي لهذا التحويل.

التمرين 5 :

A, B, A', B' أربعة نقط في المستوى لواحقها Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 على الترتيب

$$\text{حيث } Z_1 = 1 \text{ و } Z_2 = 5 + i \text{ و } Z_3 = 11 - 14i \text{ و } Z_4 = -3 + 5i$$

عين نسبة التشابه S علما أن: $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$

التمرين 6 :

A و B نقطتان في المستوى لاحقتاهما: $1 + i, -1 + 2i$ على الترتيب

f تشابه مستوى مباشر مركزه A ونسبته $\frac{2}{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$. g تشابه مستوى مباشر مركزه B

ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{-\pi}{4}$. عين الشكل المركب لكل من التحويلين f و g

التمرين 7 :

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بالنقطة $M(x'; y')$ حيث:

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases} \text{ وحيث } a, b, \alpha, \beta \text{ أعداد حقيقية غير معدومة معطاة.}$$

(1) اسمى Z و Z' لاحقتي M و M' على الترتيب.

(2) عين Z' بدلالة Z . ثم بين أن f تشابه يطلب تعيين نسبته

$$(3) \text{ ارض } a = -\sqrt{3} \text{ و } b = -1 \text{ و } \alpha = \beta = 0$$

(4) العناصر المميزة للتشابه f .

(5) متالية النقط:

$$M_0 = f(M_{-1}), M_1 = f(M_0), M_2 = f(M_1), M_3 = f(M_2), M_4 = f(M_3), \dots$$

ونسَمي (x_n, y_n) اعداداً M_n .

بين أن M_n هي صورة M_0 بتشابه يطلب تعيينه ثم استنتج عبارتي x_n و y_n بدلالة n .

التمرين 8 :

1- لتكن $M(x; y)$ نقطة في المستوى و لتكن $M'(x'; y')$ نظيرتها بالنسبة لمحور

الفواصل . اكتب x', y' بدلالة x, y

نفرض أن Z, Z' لاحقتي M و M' على الترتيب. اكتب Z' بدلالة \bar{Z} .

2- ليكن التحويل النقضي f الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

$$\text{بحيث : } Z' = 4iZ + 2 - 8i$$

ماهي طبيعة التحويل f وماهي عناصره المميزة.

3- نعتبر التحويل النقضي g الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

بحيث : $Z' = 4i\bar{Z} + 2 - 8i$. بين أن g هو مركب تحويلين يطلب تعيينهما.

التمرين 9 :

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } 2Z^2 - (1 + 5i)Z + 2(i - 1) = 0$$

نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها Z_1, Z_2, Z_3 على الترتيب حيث : $Z_1 = 2i$ و

$$Z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ و } Z_2 = \frac{1}{2}(1 + i)$$

$$(2) \text{ بين أن : } (\sqrt{2} \cdot Z_2)^{2008} + \left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} + (\sqrt{2} Z_3)^{1962} = i$$

(3) عين التشابه S الذي مركزه O ويحول B إلى A (4) عين الدوران R الذي مركزه O ويحول

B إلى C (5) عين صورة المستقيم (OC) بهذا الدوران.

التمرين 10 :

$$\text{نعتبر المعادلة : } (1) \dots Z^3 - (1 + 5i)Z^2 - 9Z - 1 + 5i = 0$$

(1) بين أن هذه المعادلة تقبل حلاً تخيلياً صرفاً Z_0

(2) حل في \mathbb{C} المعادلة حيث Z_0, Z_1, Z_2 حلولها حيث : $|Z_0| < |Z_1| < |Z_2|$ ولتكن

النقط A, B, C التي لواحقتها Z_0, Z_1, Z_2 على الترتيب.

(3) ليكن S التشابه المستوى المباشر حيث : $S(A) = A$ و $S(B) = C$ و $S(M) = M'$

حيث M و M' نقطتان لاحقتاهما Z و Z' على الترتيب .

اكتب Z' بدلالة Z . ثم عين العناصر المميزة للتشابه.

الحلول

التمرين 1 :

$$(1) \quad \begin{matrix} \times & (2) & \times & (3) & \sqrt{} & (4) & \sqrt{} \end{matrix}$$

$$(5) \quad \begin{matrix} \sqrt{} & (6) & \times & (7) & \sqrt{} & (8) & \sqrt{} \end{matrix}$$

التمرين 2 :

$$\text{كتابة } Z' \text{ بدلالة } Z : \text{ لدينا : } Z' = aZ + b \text{ حيث : } a = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{ومنه : } a = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \text{ . إذن : } a = \sqrt{3} + i$$

$$\text{ولدينا لاحقة المركز : } Z_0 = \frac{b}{1 - a} \text{ اي } Z_0 = \frac{b}{1 - \sqrt{3} - i}$$

$$\text{لكن } Z_0 = 3 + i \text{ ومنه } 3 + i = \frac{b}{1 - \sqrt{3} - i} \text{ إذن } b = (3 + i)(1 - \sqrt{3} - i)$$

$$\text{اي } b = 4 - 3\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})i \text{ إذن } b = 3 - 3\sqrt{3} - 3i + i - i\sqrt{3} + 1$$

$$\text{عليه : } Z' = (\sqrt{3} + i)Z + 4 - 3\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})i$$

ومنه f تشابه مستوى مباشر نسبته $4\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة

$$Z_0 = \frac{i}{-3-4i} \quad \text{ومنه} \quad Z_0 = \frac{i}{1-4-4i} \quad \text{أي} \quad Z_0 = \frac{b}{1-a}$$

$$Z_0 = \frac{-3i-4}{9+16} \quad \text{وبالتالي} \quad Z_0 = \frac{i(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}$$

$$\omega\left(\frac{-4}{25}; \frac{-3}{25}\right) \quad \text{ومنه} \quad Z_0 = \frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i \quad \text{وبالتالي}$$

التمرين 4 :
تعيين طبيعة f :

لدينا $Z' = aZ + b$ حيث $|a| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$ أي $|a| = 4$ وعليه f تشابه نسبته 4.

$$\theta = \frac{4\pi}{3} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{نمين زاويته : } \theta \text{ زاويته هي عمدة } a \text{ ومنه}$$

نمين مركز التشابه :

$$Z_0 = \frac{-2-i\sqrt{3}}{1+2+2\sqrt{3}i} \quad \text{ومنه} \quad Z_0 = \frac{b}{1-a} \quad \text{(ii) مركز التشابه ولاحتقتها}$$

$$Z_0 = \frac{(-2-i\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}i)}{(3+2\sqrt{3}i)(3-2\sqrt{3}i)} \quad \text{ومنه} \quad Z_0 = \frac{-2-i\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}i}$$

$$Z_0 = \frac{-12+\sqrt{3}i}{21} \quad \text{أي} \quad Z_0 = \frac{-6+4\sqrt{3}i-3i\sqrt{3}-6}{9+12}$$

$$Z_0 = \frac{-4}{21} + \frac{\sqrt{3}}{21}i \quad \text{أي}$$

- الشكل الأسّي : لدينا : $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه : $a = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{6}\right)$

$$Z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}} Z + 4 - 3\sqrt{3} - i(2 + \sqrt{3})$$

- كتابة x', y' بدلالة x, y :

$$Z' = (\sqrt{3} + i)Z + 4 - 3\sqrt{3} - i(2 + \sqrt{3}) \quad \text{لدينا}$$

$$x' + iy' = (\sqrt{3} + i)(x + iy) + 4 - 3\sqrt{3} - i(2 + \sqrt{3}) \quad \text{ومنه}$$

$$x' + iy' = x\sqrt{3} + i\sqrt{3}y + xi - y + 4 - 3\sqrt{3} - i(2 + \sqrt{3})$$

$$x' + iy' = x\sqrt{3} - y + 4 - 3\sqrt{3} + i(y\sqrt{3} + x - 2 - \sqrt{3})$$

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 4 - 3\sqrt{3} \\ y' = x + y\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{وبالتالي}$$

التمرين 3 :
- كتابة Z' بدلالة Z :

$$Z' = x' + iy'$$

$$I' - 4(x - y) + i[4(x + y) + 1] = 4x - 4y + i(4x + 4y + 1)$$

$$I' - 4x - 4y + 4ix + 4iy + i = 4x + 4iy + 4ix - 4y + i$$

$$I' - 4(x + iy) + 4ix + 4i^2y + i = 4Z + 4i(x + iy) + i$$

$$I' - 4Z + 4iZ + i = (4 + 4i)Z + i$$

طبيعة f : لدينا : $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$, $|a| = 4\sqrt{2}$ حيث $Z' = aZ + b$

- الشكل الأساسي : $Z' = aZ + b$

لدينا : $a = 4 e^{i \frac{4\pi}{3}}$ ومنه $a = 4 \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right]$

وبالتالي : $Z' = 4e^{i \frac{4\pi}{3}} Z - 2 - i\sqrt{3}$

التمرين 5 :

نفرض نقطة M لاحقتها Z وصورتها بهذا التشابه هي النقطة M' ذات اللاحقة Z' :

لدينا : $Z' = aZ + b$ مع a و b عدنان مركبان ولدينا : $S(A) = A'$ ومنه :

$-3 + 5i = a(5 + i) + b$ ومنه $S(B) = B'$ ولدينا أيضا $-11 - 14i = a + b$

بالطرح نجد : $-8 - 19i = a(-4 - i)$ ومنه $-11 - 14i + 3 - 5i = a(1 - 5 - i)$

إذن : $a = \frac{32 - 8i + 76i + 19}{16 + 1} = \frac{51 + 68i}{17}$ أي أن $a = \frac{(-8 - 19i)(-4 + i)}{(-4 - i)(-4 + i)}$

وبالتالي : $a = 3 + 4i$ ولدينا : $b = -11 - 14i - a$ أي $b = -11 - 14i - 3 - 4i$

أي أن : $b = -14 - 18i$ إذن $Z' = (3 + 4i)Z - 14 - 18i$ إذن S تشابه نسبته |a| أو ٥

التمرين 6 :

gof هو تشابه . الشكل المركب للتحويل f : لدينا : $Z' = aZ + b$ حيث

$a = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

ومنه : $a = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right)$ ومنه : $a = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

ولدينا $f(A) = A$ ومنه لاحقة A هي : $Z_0 = \frac{b}{1 - a}$

أي $1 + i = \frac{b}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i}$ إذن $b = (1 + i) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i \right)$

أي أن : $b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i - \frac{i\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}$

$b = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)i = \frac{1}{3} [4 - \sqrt{3} + i(2 - \sqrt{3})]$

إذن : $Z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \right) Z + \frac{1}{3} [4 - \sqrt{3} + i(2 - \sqrt{3})]$

الشكل المركب للتحويل f :

حيث $Z' = aZ + b$ $a = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{4} \right) \right]$

أو أن : $a = \frac{\sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{2}}{4}$ ولدينا لاحقة المركز B هي : $\frac{b}{1 - a}$ ومنه :

$b = (-1 + 2i) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ وبالتالي $-1 + 2i = \frac{b}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$

ومنه $b = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \right)$ ومنه $b = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} + 2i - \sqrt{2}i - \sqrt{1}$

$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \right)$

التمرين 7 :
دالة Z' بدلالة Z :

$Z' = x' + iy' = (ax - by + \alpha) + i(bx + ay + \beta)$

$Z' = ax - by + \alpha + ibx + iay + i\beta = ax + iay + ibx - by + \alpha + i\beta$

$Z' = ax + iay + ibx - by + \alpha + i\beta = a(x + iy) + i(bx + ay) + \alpha + i\beta$

$(ax + iay + ibx - by + \alpha + i\beta) = aZ + i(bZ + \alpha + i\beta)$

$$\begin{cases} x_n = 2^n \cos \frac{5\pi n}{6} \\ y_n = 2^n \sin \frac{5\pi n}{6} \end{cases} \quad \text{إذن } Z'_n = 2^n \left(\cos \frac{5\pi n}{6} + i \sin \frac{5\pi n}{6} \right)$$

ويبرهن بالتراجع.

التمرين 8 :

1- كتابة x' و y' بدلالة x, y :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{ومنه : } Z' = x' + iy' \quad \text{أي} \quad Z' = x + iy$$

$$\text{إذن : } Z' = \bar{Z}$$

2- طبيعة f : f هو تشابه نسبة $k = |4i|$. إذن : $k = 4$ وزاويته عمدة k أي زاوية

$$\text{التشابه } \frac{\pi}{2} \text{ ومركزه النقطة } \omega \text{ ذات اللاحقة } Z_0 \text{ حيث : } Z_0 = \frac{2 - 8i}{1 - 4i} = \frac{2(1 - 4i)}{1 - 4i}$$

$$\text{ومنه : } Z_0 = 2$$

نبيان أن g هو مركب تحويلين :

أي هو مركب التناظر الذي محوره $(x'x)$ و التشابه f

$$\text{إذن : } M(Z) \xrightarrow{S_x} M_1(Z_1) \xrightarrow{S} M'(Z')$$

$$Z_1 = \bar{Z} \quad Z' = 4iZ_1 + 2 - 8i$$

$$\text{لعلنا : } Z' = 4i\bar{Z} + 2 - 8i \quad \text{إذن : } g = SoS_x \text{ حيث } S = f$$

التمرين 9 :

$$(1) \text{ حل المعادلة : } 2Z^2 - (1 + 5i)Z + 2(i - 1) = 0$$

$$\Delta = -8 - 6i \quad \text{ومنه : } \Delta = (1 + 5i)^2 - 4 \times 2(2i - 1)$$

نحسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب Δ :

$$\delta = x + iy \quad \text{جذرا تربيعيا للعدد } \Delta \text{ فيكون } \delta^2 = \Delta$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ وعليه } f \text{ تشابه نسبته } Z' = (a + ib)Z + \alpha + i\beta$$

$$(2) \text{ من أجل } a = -\sqrt{3}, b = -1, \alpha = \beta = 0$$

$$\text{فإن : } Z' = (-\sqrt{3} - i)Z \text{ وعليه } k = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \text{ نسبة التشابه}$$

مركز التشابه هو O وزاوية التشابه θ هي عمدة $(-\sqrt{3} - i)$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{- لدينا : } M_1 = f(M_0) \text{ و } M_2 = f(M_1)$$

$$\text{ومنه : } M_2 = f[f(M_1)] \text{ أي } M_2 = (f \circ f)(M_0)$$

$$\text{وكذلك : } M_3 = f(M_2) \text{ أي } M_3 = f[(f \circ f)(M_0)]$$

$$\text{إذن : } M_n = [f \circ (f \circ f) \dots](M_0) \text{ وبالتالي : } M_n = (f \circ f \circ \dots \circ f)(M_0)$$

$$\text{لدينا } f \circ f \text{ هو تشابه مركزه } O \text{ ونسبته } 2^2 = 4 \text{ وزاويته } 2 \times \frac{5\pi}{6} \text{ أي } \frac{5\pi}{3}$$

$$f \circ f \circ f \text{ هو تشابه نسبته } 2^3 = 8 \text{ وزاويته } 3 \times \frac{5\pi}{6} \text{ أي } \frac{5\pi}{2}$$

$$\text{وعليه : } f \circ f \circ \dots \circ f \text{ هو تشابه نسبته } 2^n \text{ وزاويته } n \times \frac{5\pi}{2} \text{ أي } \frac{5\pi n}{2}$$

$$\text{إذن : } Z'_n = 2^n \left(\cos \frac{5\pi n}{6} + i \sin \frac{5\pi n}{6} \right) Z_0$$

$$\left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} = \cos \frac{2007\pi}{2} + i \sin \frac{2007\pi}{2} \text{ وعليه :}$$

$$\left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 714\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 714\pi\right)$$

$$\left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \text{ ومنه :}$$

$$\sqrt{2} Z_3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ إذن } \sqrt{2} Z_3 = i \text{ ومنه } Z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$\left(\sqrt{2} Z_3\right)^{1962} = \cos \frac{1962\pi}{2} + i \sin \frac{1962\pi}{2} = \cos 961\pi + i \sin 961\pi$$

$$= \cos(\pi + 960\pi) + i \sin(\pi + 960\pi)$$

$$\left(\sqrt{2} Z_3\right)^{1962} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\left(\sqrt{2} Z_2\right)^{2008} + \left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} + \left(\sqrt{2} Z_3\right)^{1962} = 1 + i - 1 = i \text{ وعليه :}$$

١. التشابه S :

الصيغة المركبة للتشابه هي : $Z' = aZ$ لأن المركز هو O. ومنه بما أن : $S(B) = A$

$$i = a \cdot (1 + i) \text{ وعليه } 2i = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right) (1 + i) \text{ إذن } Z_1 = aZ_2$$

$$\text{وبالتالي : } a = \frac{i}{1+i} \text{ أي : } a = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2} \text{ أي أن :}$$

$$k = |a| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ نسبة التشابه : } Z' = \frac{1}{2} (1+i) Z \text{ وعليه } a = \frac{1}{2} (1+i)$$

$$\text{بجمع (1) و (3) : } \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \dots (1) \\ 2xy = -6 \dots (2) \\ x^2 + y^2 = 10 \dots (3) \end{cases} \text{ وعليه : } \begin{cases} (x + iy)^2 = -8 - 6i \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases}$$

$$\text{نجد : } 2x^2 = 2 \text{ ومنه } x^2 = 1 \text{ وعليه } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

$$\text{لما } y = 3 : x = -1 \text{ ولما } y = -3 : x = 1$$

$$\text{إذن : } \Delta \text{ له جذرين تربيعيين } \delta_1 = 1 - 3i, \delta_2 = -1 + 3i$$

• للمعادلة حلين متمميزين :

$$Z'' = \frac{1 + 5i + 1 - 3i}{4}, \quad Z' = \frac{1 + 5i - 1 + 3i}{4}$$

$$Z'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad Z' = 2i :$$

$$(2) \text{ تبين أن : } \left(\sqrt{2} \cdot Z_2\right)^{2008} + \left(\frac{1}{2} Z_1\right)^{1429} + \left(\sqrt{2} \cdot Z_3\right)^{1962} = i$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad Z_2 = \frac{1}{2} (1 + i) \text{ ومنه : } |Z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{4} \text{ عمدة } Z_2$$

$$\text{ومنه : } \theta_2 = \frac{\pi}{4} \text{ وعليه : } Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] \text{ وبالتالي :}$$

$$\left(\sqrt{2} Z_2\right)^{2008} = 1 \text{ أي } \left(\sqrt{2} Z_2\right)^{2008} = \cos 502\pi + i \sin 502\pi$$

$$Z_1 = 2i \text{ ومنه : } Z_1 = 2 \text{ وعمدة } Z_1 \text{ هي } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{إذن : } Z_1 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] \text{ وعليه } \frac{1}{2} Z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$-i\beta^3 + \beta^2 + 5i\beta^2 - 9i\beta - 1 + 5i = 0 \text{ ومنه } -i\beta^3 + (1 + 5i)\beta^2 - 9i\beta - 1 + 5i = 0$$

$$\text{وبالتالي : } \beta^2 - 1 + i(-\beta^3 + 5\beta^2 - 9\beta + 5) = 0$$

$$\text{وعليه : } \begin{cases} \beta^2 - 1 = 0 \dots (1) \\ -\beta^3 + 5\beta^2 - 9\beta + 5 = 0 \end{cases} \text{ حل (1) هي } \beta = 1 \text{ أو } \beta = -1$$

$$\text{بالتعويض في (2) نجد : } \beta = 1 \text{ تحقق المعادلة. ومنه : } \beta = 1 \text{ إذن : } Z_0 = i$$

$$(2) \text{ العبارة : } Z^3 - (1 + 5i)Z^2 - 9Z - 1 + 5i \text{ وتكافئ}$$

$$aZ^3 + bZ^2 + cZ - aiZ^2 - biZ - ci \text{ أي } (Z - i)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$\text{أي } aZ^3 + (b - ai)Z^2 + (c - bi)Z - ci$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 4i \\ c = -i - 5 \end{cases} \text{ أي أن : } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 4i \\ c = \frac{-1 + 5i}{-i} \end{cases} \text{ وعليه : } \begin{cases} a = 1 \\ b - ai = -1 - 5i \\ c - bi = -9 \\ -ci = -1 + 5i \end{cases}$$

$$\text{وعليه العبارة تصبح : } (Z - i)(Z^2 - (1 + 4i)Z + i + 5)$$

$$\text{وعليه المعادلة تكافئ : } (Z - i)(Z^2 - (1 + 4i)Z - i - 5) = 0$$

$$\text{أي تكافئ : } Z - i = 0 \text{ أو } Z^2 - (1 + 4i)Z - i - 5 = 0$$

$$\text{وبالتالي : } Z = i \text{ أو } Z^2 - (1 + 4i)Z - i - 5 = 0$$

$$\text{حل المعادلة : } Z^2 - (1 + 4i)Z - i - 5 = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ : ومنه } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ زاوية التشابه } \theta \text{ هي : عمدة } a \text{ وعليه :}$$

(4) تعيين الدوران R :

العبارة المركبة للدوران هي : $Z' = aZ$ (المركز هو O) وبما أن : $R(B) = C$ فإن :

$$Z_3 = aZ_2 \text{ وبالتالي : } \frac{\sqrt{2}}{2}i = a \cdot \frac{1}{2}(1 + i) \text{ أي } a = \frac{\sqrt{2}i}{1 + i}$$

$$Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)Z \text{ ومنه } a = \frac{\sqrt{2}i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$$

$$\theta' = -\frac{\pi}{4} \text{ وبالتالي : } \begin{cases} \cos \theta' = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ زاوية الدوران } \theta' \text{ هي عمدة } a \text{ وعليه :}$$

(5) صورة المستقيم (OC) بالدوران : بما أن صورة المستقيم بالدوران هي مستقيم فإننا نعين

صورتي O و C بهذا الدوران. صورة النقطة O بهذا الدوران هي O لأن مركز الدوران هو O

نعين صورة النقطة C حيث لاحظتها $i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ وعليه نفرض C' صورتها فيكون :

$$C' \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right) \text{ إذن } Z_{C'} = \frac{1}{2}(i + 1) \text{ أي } Z_{C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ومنه صورة المستقيم (OC) هي المستقيم (OC') حيث $C' \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right)$.

التمرين 10 :

(1) تبين أن المعادلة تقبل حلا تخيليا صرفا Z_0 :

$$\text{نضع } Z_0 = i\beta \text{ فنجد : } (i\beta)^3 - (1 + 5i)(i\beta)^2 - 9(i\beta) - 1 + 5i = 0$$

$$\Delta = 5 + 12i \quad \text{ومنه} \quad \Delta = (1 + 4i)^2 + 4(i + 5)$$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

ليكن δ جذر تربيعي للعدد Δ : أي $\delta^2 = \Delta$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \dots (1) \\ 2xy = 12 \dots (2) \\ x^2 + y^2 = 13 \dots (3) \end{cases} \quad \text{نفرض } \delta = x + iy \text{ فيكون :}$$

بجمع (1) و (3) نجد : $2x^2 = 18$ ومنه $x^2 = 9$ أي $x = 3$ أو $x = -3$

لما $x = 3$: $y = 2$ ولما $x = -3$: $y = -2$

ومنه $\delta_1 = 3 + 2i$ و $\delta_2 = -3 - 2i$

$$Z'' = \frac{1 + 4i + 3 + 2i}{2}, \quad Z' = \frac{1 + 4i - 3 - 2i}{2}.$$

وعليه للمعادلة حلين متمميزين.

$$\text{إن : } Z' = -1 + i, \quad Z'' = 2 + 3i$$

$$Z_2 = 2 + 3i, \quad Z_1 = -1 + i, \quad Z_0 = i \quad \text{وعليه : } |Z''| = \sqrt{13} \text{ و } |Z'| = \sqrt{2}$$

$$3\text{- كتابة } Z' \text{ بدلالة } Z : \text{ لدينا } Z' = aZ + b$$

$$\text{بما أن } S(A) = A \text{ فإن : } Z_0 = aZ + b \text{ ومنه : } i = ai + b \text{ ومنه :}$$

$$(2) \dots b = i - ia \text{ . وبما أن : } S(C) = B \text{ فإن : } Z_1 = aZ_2 + b$$

$$\text{إن : } -1 + i = a(2 + 3i) + b \dots (3)$$

$$\text{نعوض } b \text{ بقيمتها من (2) في (3) فنجد : } -1 + i = a(2 + 3i) + i - ia$$

$$\text{وعليه : } -1 = a(2 + 2i) \text{ وبالتالي : } a = \frac{-1}{2 + 2i} = \frac{-1(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)}$$

$$\text{إن : } a = \frac{-2 + 2i}{8} \text{ وعليه : } a = +\frac{1}{4}(-1 + i) \text{ وبالتالي :}$$

$$b = i - i\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) \text{ أي : } b = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i \text{ ومنه :}$$

$$Z' = \frac{1}{4}(-1 + i)Z + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$$

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{وعليه نسبة التشابه هي } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ عمدة } a \text{ هي } \theta \text{ حيث :}$$

$$\text{ومنه : } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ومنه مركز التشابه هو } A \text{ ونسبته } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ وزاويته } \frac{3\pi}{4}$$

13- الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

1- مراجعة الجداء السلمي في المستوى :

تعريف 1 :

\vec{u} و \vec{v} شعاعان غير معدومين في المستوى (P) لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

- إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فإن : $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ أو \vec{u} و \vec{v} متعامدان

- (المربع السلمي) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

مبرهنة 1 :

نفرض في المستوى : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

(1) إذا كان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AH} في نفس الاتجاه : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AH$

(2) إذا كان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AH} مختلفين في الاتجاه فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AH$

و في الحالتين : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

مبرهنة 2 :

لتكن \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} أشعة في المستوى P, k عدد حقيقي :

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad 2) (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$3) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{نتائج : } 1) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad 2) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

مبرهنة 3 :

ليكن $(\vec{o}; \vec{i}, \vec{j})$ معطى متعامد و متجانس في المستوى (P) وليكن الشعاعين \vec{u} و \vec{v} حيث

إحداثياتها (x, y) و (x', y') على الترتيب لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{نتيجة :}$$

تعريف 2 :

كل شعاع غير معدوم و عمودي على المستقيم (Δ) يسمى الشعاع الناطقي للمستقيم (Δ) فإذا

كان الشعاع $\vec{u}(a; b)$ شعاع ناطقي للمستقيم (Δ) فإن معادلة (Δ) تكون من الشكل :

$$ax + by + c = 0$$

مبرهنة 4 : المسافة بين النقطة $M(\alpha; \beta)$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{تعطى بالعلاقة : } \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2- المسقط العمودي على مستقيم و على مستو :

(أ) المسقط العمودي على مستقيم :

تعريف 3 :

نسمي المسقط العمودي للنقطة M على مستقيم (D) النقطة M' . تقاطع المستقيم (D) و

المستوي (P') الذي يحتوي M و يعامد (D) . إذا كان $M \in (D)$ فإن $M' = M$

(ب) المسقط العمودي على مستو :

تعريف 4 :

نسمي مسقطا عموديا للنقطة N على المستوى (P) النقطة N' وهي تقاطع (P) و المستقيم

(Δ) الذي يشمل N و يعامد المستوى (P) . إذا كان $N \in (P)$ فإن $N' = N$

3- تعريف و خواص الجداء السلمي في الفضاء :

تعريف 5 :

الجداء السلمي لشعاعين \vec{u} و \vec{v} في الفضاء هو الجداء السلمي لشعاعين \vec{u} و \vec{v} في المستوى الذي يحتوي على هذين الشعاعين.

• إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فإن هذين الشعاعين متعامدين

• إذا كان للشعاعين \vec{u} و \vec{v}' نفس الحامل و كان : $\vec{u} \cdot \vec{v}' = \vec{u} \cdot \vec{v}$

نفول أن \vec{v}' هو المسقط العمودي لـ \vec{v} على \vec{u} .

نتائج :

• إذا لم يكن للشعاعين \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} نفس الحامل فإنهما يعينان مستويا وحيدا (ABC)

ومنه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = AB \cdot AH$

حيث H هو المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

• إذا كان للشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} نفس الحامل و كانا غير معدومين فإنهما يعينان مستقيما

(AB)

و يكون في حالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} في نفس الاتجاه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC$

و في حالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} مختلفين في الاتجاه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \cdot AC$

مبرهنة 5 :

إذا كانت \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ثلاثة أشعة في الفضاء و كان k عدد حقيقيا فإن :

$$\bullet \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\bullet (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \bullet \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

مرف 6 :

الجداء غير معدوم و عمودي على شعاعين ليس لهما نفس الحامل من مستو (P) يسمى شعاع

الطبي للمستوى (P)

4- العبارة التحليلية للجداء السلمي :

مبرهنة 6 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ليكن الشعاعان :

$$\vec{u}(x; y; z) \text{ و } \vec{v}(x'; y'; z') \text{ لدينا : } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

ملاحظات :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ ومنه : } \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

إذا كانت $A(x_0; y_0; z_0)$, $B(x_1; y_1; z_1)$ في الفضاء فإن : المسافة بين A و B تعطى بالعبارة :

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

5- المعادلة الديكارتية لمستوى معلم متعامد متجانس :

تعريف 7 :

نسمي معادلة ديكارتية لمستوى (P) العلاقة المحققة فقط من أجل إحداثيات كل نقط P.

مثال :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

المستوى $(o; \vec{i}, \vec{j})$ هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث : $z = 0$.

وعليه $z = 0$ هي معادلة ديكارتية لهذا المستوى (o, \vec{i}, \vec{j}) .

مبرهنة 7 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ كل مستوى يمر من نقطة A من

الفضاء ويعامد الشعاع $\vec{n}(a; b; c)$ يقبل معادلة من الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ . الشعاع } \vec{n}(a; b; c) \text{ هو شعاع ناظمي للمستوى}$$

و العكس كل معادلة من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية ،

غير معدومة جميعا هي معادلة لمستوى حيث $\vec{n}(a; b; c)$ هو شعاع ناظمي للمستوى

6- المسافة بين نقطة ومستقيم ثم و مستوى :

تعريف 8 :

نسمي المسافة بين نقطة M ومستقيم (D) أو مستوى (P) طول القطعة [MH].

H هي للمسقط العمودي للنقطة M على (D) أو على (P).

مبرهنة 8 :

$$MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \text{ لدينا : } \vec{n} \text{ شعاع ناظمي A وشعاع المستوي الذي يشمل النقطة P}$$

مبرهنة 9 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ تعطى المسافة d بين النقطة

$M(\alpha; \beta; \gamma)$ والمستوى (P) الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ بالعبارة :

$$MH = d = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

التمارين

التمرين 1 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- بين أن النقط $A(-1; 1; 0)$, $B(1; -1; 1)$, $C(0; 2; -1)$ تعين مستويا وحيدا.

2- بين أن الشعاع $\vec{u}(2; 6; 8)$ عمودي على المستوي (ABC)

التمرين 2 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة

$$A(1; 2; -3) \text{ و الشعاع } \vec{u}(-4; 2; 1)$$

(1) اكتب معادلة المستوى (P) الذي يشمل A ويعامد \vec{u} .

(2) احسب المسافة بين النقطة $C(-1; 1; 1)$ والمستوى (P)

التمرين 3 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(1) مستقيم يشمل النقطة $A(1; 1; -1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(-1; 2; -2)$

(2) $B(2; -2; 2)$ نقطة من الفضاء. احسب المسافة بين B و (D).

التمرين 4 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ وحدة القياس هي Cm

ليكن النقط : $A(1; 0; -1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(2; 3; 3)$, $D(2; 1; 5)$

(1) بين أن الشعاع $\vec{u}(-1; 1; -1)$ عمودي على المستوي (ABC)

(2) استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) (3) بين أن ABCD هو رباعي أوجه.

(4) احسب مساحة المثلث ABC (5) احسب المسافة بين النقطة D والمستوى (ABC)

(6) احسب حجم رباعي الأوجه ABC'D

الحلول

التمرين 1 :

1- تبيان أن النقط C, B, A تعين مستويا :

لدينا $\overrightarrow{AB} (2; -2; 1)$ و $\overrightarrow{AC} (1; 1; -1)$. الشعاعان \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} ليس لهما

نفس الحامل لأن إحداثيات \overrightarrow{AB} ليست متناسبة مع إحداثيات \overrightarrow{AC} فمثلا : $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{1}$

و عليه فهي تشكل مستويا وحيدا (ABC)

2- تبيان أن $\vec{u} (2; 6; 8)$ عمودي على المستوى (ABC)

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(2) + 6(-2) + 8(1) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(1) + 6(1) + 8(-1) = 0$$

ومنه الشعاع \vec{u} عمودي على كل من الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} من المستوى (ABC) وعليه
 (a) عمودي على المستوى (ABC).

التمرين 2 :

(a) المستوى (P) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ بحيث : $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$ ومنه :
 $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

$$\vec{u}(-4; 2; 1) \text{ و } \overrightarrow{AM}(x-1; y-2; z+3)$$

$$\text{وبالتالي : } -4(x-1) + 2(y-2) + z+3 = 0 \text{ أي } -4x + 4 + 2y - 4 + z + 3 = 0$$

$$\text{ومنه : } -4x + 4 + 2y - 4 + z + 3 = 0$$

و عليه معادلة المستوى (P) هي : $-4x + 2y + z + 3 = 0$

$$d = \frac{-4(-1) + 2(1) + 1 + 3}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}} \quad \text{(2) المسافة بين C و (P) :}$$

$$d = \frac{4 + 2 + 4}{\sqrt{16 + 4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{21}}{21}$$

التمرين 3 :

حساب المسافة بين B و D : لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على D

$$\text{أيضا } \overrightarrow{AB} (1; -3; 3) \text{ و } \vec{u}(-1; 2; -2)$$

التمرين 5 :

A و B نقطتان متمايزتان في الفضاء . I منتصف [AB]

1- ماهي المجموعة E_1 للنقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

2- ماهي المجموعة E_2 للنقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4} AB^2$

3- ماهي المجموعة E_3 للنقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 + MB^2 = AB^2$

4- ماهي المجموعة E_4 للنقط M من الفضاء بحيث : $MA^2 - MB^2 = \frac{1}{2} AB^2$

التمرين 6 :

(P) مستو الذي معادلته : $Cx + y + z - 3 = 0$ والنقطة $A(c; 2; 1)$, $C \in \mathbb{R}$

عين العدد C بحيث تكون المسافة d بين a و (P) تساوي 3.

التمرين 7 :

نعتبر الأشعة : $\vec{u}(1; 1; 1)$, $\vec{v}(13; -2; 3)$, $\vec{w}(1; 2; x)$ حيث x عدد حقيقي.

عين قيمة x بحيث يكون الشعاع \vec{w} عمودي على كل من الشعاعين \vec{u} و \vec{v} .

التمرين 8 :

نعتبر الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ والأشعة

$$\vec{w}\left(\frac{-9}{11}; \frac{6}{11}; \frac{2}{11}\right), \vec{v}\left(\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; \frac{6}{11}\right), \vec{u}\left(\frac{2}{11}; \frac{6}{11}; \frac{-9}{11}\right)$$

(1) أحسب كل من $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و $\|\vec{w}\|$ (2) لحسب $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$

(3) هل المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ متعامد متجانس.

التمرين 9 :

ليكن (P) المستوى الذي معادلته : $x - 2y + 4z - 2 = 0$

1- أكتب معادلة المستوى (P') الذي يشمل النقطة $A(-1; 2; 1)$ و يوازي (P)

2- أحسب المسافة بين النقطة $C(1; -2; 3)$ و كل من المستويين (P) و (P')

التمرين 10 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط

$$C(0; 1; -2), B(-5; 2; 1), A(-1; 2; 3)$$

(1) عين المعادلة الديكارتية للمجموعة E_1 للنقط $M(x; y; z)$ بحيث : $MA^2 + 3MB^2 = 5$

(2) عين المعادلة الديكارتية للمجموعة E_2 للنقط $M(x; y; z)$ بحيث $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4$

ومنه من جهة :

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}| = |(-1)(1) + 2(-3) + (-2)(3)| = |-13| = 13 \dots (1)$$

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}| = |\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}| = |\vec{u}| \cdot AH$$

ومن جهة أخرى :

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} \times AH = 3 \cdot AH \dots (2)$$

$$AH = \frac{13}{3} \text{ ومنه } 3AH = 13 \text{ : (2) و (1) من}$$

في المثلث ABH القائم في H لدينا : $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$AB^2 = (1)^2 + (-3)^2 + (3)^2 = 19 \text{ : لكن } BH^2 = AB^2 - AH^2$$

$$BH = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ أي } BH^2 = \frac{2}{9} \text{ ومنه } BH^2 = 19 - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = 19 - \frac{169}{9}$$

التمرين 4 :

1- بيان أن : \vec{u} عمودي على المستوى ABC لدينا $\overrightarrow{AC}(1; 3; 4)$, $\overrightarrow{AB}(-2; 4; 2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = (-2) \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times (-1) = -2 + 4 - 2 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 3 \times 1 + 4(-1) = 0$$

ومنه \vec{u} عمودي على كل من الشعاعين الذين ليس لهما نفس الحامل \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وعليه فهو عمودي على المستوى (ABC).

2- استنتاج معادلة (ABC) :

المستوى (ABC) هو مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث :

$$1(x-1) + 1.y + (-1)(z+1) = 0 \text{ ومنه } \overrightarrow{AM}(x-1; y; z+1) \cdot \vec{u} = 0$$

$$x + y - z - 2 = 0 \text{ : إذن } x - 1 + y - z - 1 = 0 \text{ وعليه}$$

3- تبين أن ABCD هو رباعي أوجه :

$$2 + 1 - 5 - 2 = -4. D(2; 1; 5) \text{ حيث (ABC) لا تنتمي إلى (ABC)}$$

ومنه : D ليست نقطة من (ABC) وبالتالي ABCD هو رباعي وجوه.

4- مساحة المثلث ABC : لدينا

$$|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}| = BC \cdot BH = BH \cdot \sqrt{14} \dots (1)$$

$$BC = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{14} \text{ : إذن } \overrightarrow{BC}(3; -1; 2)$$

ومن جهة أخرى : لدينا : $\overrightarrow{BA}(2; -4; -2)$, $\overrightarrow{BC}(3; -1; 2)$ وعليه :

$$|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}| = |3 \times 2 + (-1)(-4) + 2(-2)| = 6 \dots (2)$$

$$BH = \frac{6}{\sqrt{14}} \text{ ومنه } BH \cdot \sqrt{14} = 6 \text{ : (2) و (1) من}$$

$$AB^2 = (-2)^2 + (4)^2 + 2^2 \text{ حيث } BH = \frac{3\sqrt{14}}{7} \text{ أي } BH = \frac{6\sqrt{14}}{14}$$

ومنه : $AB^2 = 24$ أي : $AH^2 = AB^2 - BH^2$ وعليه

$$AH^2 + (24) - \left(\frac{3\sqrt{14}}{7}\right)^2 = 24 - \frac{126}{49} = \frac{1050}{49}$$

$$AH = \frac{\sqrt{1050}}{7} \text{ ومنه ارتفاع المثلث ABC هو } \frac{\sqrt{1050}}{7} \text{ Cm : إذن}$$

$$S = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{\sqrt{1050} \times \sqrt{14}}{2 \times 7} \text{ : إذن مساحة المثلث ABC هي}$$

$$AH = \frac{\sqrt{1050}}{7} \text{ , } BC = \sqrt{14} \text{ : لان : وبالتالي}$$

$$S = \frac{\sqrt{14700}}{14} = \frac{10\sqrt{147}}{14} = \frac{5\sqrt{147}}{7} = \frac{5 \times 7 \sqrt{3}}{7}$$

$$S = 5\sqrt{3} \text{ Cm}^2 \text{ : إذن}$$

٩. حساب المسافة بين D و (ABC) :

لنكن I المسقط العمودي للنقطة D على (ABC) فيكون :

$$DI = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ Cm هي (ABC) و D المسافة بين } DI = \frac{|2+1-5-2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot s \cdot h \text{ : لدينا ABCD رباعي الأوجه : حيث } V = \frac{1}{3} \text{ : حيث } S \text{ مساحة القاعدة و هي}$$

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ أي } S = 5\sqrt{3} \text{ : h هو المسافة بين D و (ABC)}$$

$$V = \frac{5 \times 3 \times 4}{3} = 20 \text{ Cm}^3 \text{ : وعليه } V = \frac{1}{3} \times 5\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

التمرين 5 :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

١ عيّن E :

وعليه : $\vec{MI} \cdot \vec{IA} = \frac{1}{8} AB^2$: إن $4 \times \vec{MI} \cdot \vec{IA} = \frac{1}{2} AB^2$

$\vec{MI} \cdot \vec{IA} = \frac{1}{2} IA^2$ أي $\vec{MI} \cdot \vec{IA} = \frac{1}{8} \cdot (2IA)^2$

نفرض : H : المسقط العمودي للنقطة M على (AB) فيكون : $HI \cdot IA = \frac{1}{2} IA^2$

ومنه : $HI = \frac{1}{2} IA$ وعليه المجموعة E_4 للنقطة M هي المستوى المحوري للقطعة [IB]

التمرين 6 :
تعيين C :

$d = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + 2}}$: ومنه $d = \frac{|c \cdot c + 2 + 1 - 3|}{\sqrt{c^2 + (1)^2 + (1)^2}}$

الآن بما أن $d = 3$ فإن : $\frac{c^2}{\sqrt{c^2 + 2}} = 3$ وعليه : $c^4 = 9(c^2 + 2)$

وعليه : $c^4 - 9c^2 - 18 = 0$ بوضع $c^2 = p$ نجد : $p^2 - 9p - 18 = 0$
 $\Delta = 153$: ومنه $\Delta = (-9)^2 - 4(-18)$

وعليه للمعادلة حلين : $p_1 = \frac{9 - 3\sqrt{17}}{2}$ و $p_2 = \frac{9 + 3\sqrt{17}}{2}$

لكن $c^2 = p$: ومنه : $p_1 < 0$ مرفوض . وعليه : $C^2 = \frac{9 + 3\sqrt{17}}{2}$

الآن : $C = -\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{17}}{2}}$ أو $C = \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{17}}{2}}$

التمرين 7 :

$\vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + x \times 1 = 3 + x$

$\vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \times 13 + 2(-2) + x \times 3 = 3x + 9$

بما أن \vec{w} عمودي على كل من \vec{u} و \vec{v} إذا وفقط إذا كان :

ومنه : $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 3x + 9 = 0 \end{cases}$

التمرين 8 :

منه : $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ ليس لها نفس الحوامل و لدينا :

ومنه : $(\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = 0$ و $(\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = 0$

وعليه : $MI^2 - IA^2 = 0$ أي أن : $IM^2 = IA^2$ وبالتالي :

المجموعة E_2 هي سطح كرة مركزها I ونصف قطرها [IA] أي سطح كرة قطرها [AB] .

2- تعيين E_2 : لدينا $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{1}{4} AB^2$ وعليه :

$(\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = \frac{1}{4} AB^2$ أي : $(\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = \frac{1}{4} AB^2$

وعليه : $MI^2 - IA^2 = \frac{1}{4} AB^2$ أي : $MI^2 = IA^2 + \frac{1}{4} AB^2$ ومنه

$IM^2 = \frac{1}{2} AB^2$ وبالتالي $MI^2 = \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 + \frac{1}{4} AB^2$

وعليه E_2 هي سطح كرة مركزها I ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$

3- تعيين E_3 : لدينا : $MA^2 + MB^2 = AB^2$ أي : $(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = AB^2$

وعليه : $(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} - \vec{IA})^2 = AB^2$ ومنه :

أي $\vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 + MI^2 - 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 = AB^2$

$2MI^2 = AB^2 - 2IA^2$ وعليه : $2MI^2 + 2IA^2 = AB^2$

$MI^2 = \frac{1}{2} AB^2 - IA^2 = \frac{1}{2} AB^2 - \left(\frac{1}{2} AB\right)^2 = \frac{1}{2} AB^2 - \frac{1}{4} AB^2$

إذن : $IM^2 = \frac{1}{4} AB^2$ وعليه E_3 هي سطح كرة مركزها I ونصف قطرها $R = \frac{1}{2} AB$

4- تعيين E_4 : لدينا $MA^2 - MB^2 = \frac{1}{2} AB^2$ ومنه :

وبالتالي : $(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = \frac{1}{2} AB^2$

$(\vec{MI} + \vec{IA})^2 - (\vec{MI} - \vec{IA})^2 = \frac{1}{2} AB^2$ أي أن :

$MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 - (MI^2 - 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2) = \frac{1}{2} AB^2$

1- تعيين E_1 :

نقترض $M(x; y; z)$ التمرين 10

لدينا
وعليه :

$$\overline{MB}(-5-x; 2-y; 1-z), \overline{MA}(-1-x; 2-y; 3-z)$$

$$MA^2 = (-1-x)^2 + (2-y)^2 + (3-z)^2$$

$$MA^2 = 1 + 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2 + 9 - 6z + z^2$$

$$MA^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 14$$

$$MB^2 = (-5-x)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2$$

$$MB^2 = 25 + 10x + x^2 + 4 - 4y + y^2 + 1 - 2z + z^2$$

$$MB^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 4y - 2z + 30$$

$$2MA^2 + 3MB^2 = 5$$

والدينا :

$$2(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 14)$$

$$+ 3(x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 4y - 2z + 30) = 5$$

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 34x - 20y - 18z + 118 = 5$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{34}{5}x - 4y - \frac{18}{5}z + \frac{118}{5} = 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 - (2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \frac{118}{5} = 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{289}{25} + 4 + \frac{81}{25} - \frac{118}{5} + 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{289 + 100 + 81 - 590}{25} + 5$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{-120 + 125}{25}$$

$$\left(x + \frac{17}{5}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{9}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

(1)

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{-9}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 36 + 81}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{7}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{121} + \frac{49}{121} + \frac{36}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{\left(\frac{-9}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{2}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{121} + \frac{36}{121} + \frac{4}{121}} = \sqrt{\frac{121}{121}} = 1$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{2}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{7}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right) \times \frac{6}{11} = \frac{12 + 42 - 54}{121} = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{W} = \frac{2}{11} \times \left(\frac{-9}{11}\right) + \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right) \times \left(\frac{2}{11}\right) = \frac{-18 + 36 - 18}{121} = 0$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \frac{6}{11} + \left(\frac{-9}{11}\right) + \frac{7}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{2}{11} = \frac{-54 + 42 + 12}{121} = 0$$

$$\vec{U} \perp \vec{W} \text{ و } \vec{U} \perp \vec{V} \text{ و } \|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = \|\vec{W}\| = 1$$

و $\vec{V} \perp \vec{W}$ فإن المثلث متجانس.

التمرين 9 :

1- معادلة (P) :

الشعاع: $\vec{n} (1; -2; 4)$ هو شعاع ناظمي للمستوى (P)

وبما أن (P') يوازي P فإن \vec{n} هو أيضا شعاع ناظمي للمستوى (P') .

ومنه معادلة (P') هي : $x - 2y + 4z + \alpha = 0$ وبما أن $A \in (P')$ فإن :

$$\alpha = 1 \quad -1 + \alpha = 0 \quad \text{وعليه : } -1 - 2(2) + 4(1) + \alpha = 0$$

إذن معادلة (P') هي : $x - 2y + 4z + 1 = 0$

2- المسافة بين C و (P) :

$$d_1 = \frac{5\sqrt{21}}{7} \text{ أي } d_1 = \frac{|1 - 2(-2) + 4(3) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{21}} = \frac{15\sqrt{21}}{21}$$

- المسافة بين C و (P') :

$$d_2 = \frac{6\sqrt{21}}{7} \text{ أي } d_2 = \frac{|1 - 2(-2) + 4(3) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (4)^2}} = \frac{18}{\sqrt{21}} = \frac{18\sqrt{21}}{21}$$

14- المستقيمات والمستويات في الفضاء

I- التذكير بالمرجح :

تعريف 1 :

نسمى مرجح النقط : A_1, A_2, \dots, A_n المرفقة بالمعاملات : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بحيث $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ النقطة الوحيدة G التي تحقق

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$
 مبرهنة 1 :

$\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$
 فمن أجل كل نقطة M من الفضاء يكون

$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$
 (2) إذا كان G مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ وكان K مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن G مرجح الجملة $\{(K, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$
 مبرهنة 2 :

لتكن A و B نقطتان متميزتان و α و β عدنان حيث $\beta + \alpha \neq 0$

مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ هي المستقيم (AB).

مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ هي القطعة [AB] إذا كان α و β من نفس الإشارة.

ملاحظة :

لكي نبرهن أن ثلاث نقط على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أن إحداهما مرجح النقطتين المتبقيتين.

مبرهنة 3 :

لتكن A, B, C ثلاث نقط مختلفة وليست على استقامة واحدة. α و β و γ أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ هي المستوي (ABC)

مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ هي الجزء من

المستوى المحدد بالمثلث ABC إذا كان للأعداد α و β و γ نفس الإشارة.

II- التمثيل الوسيطى لمستقيم و لمستوي :

لنأخذ الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

I التمثيل الوسيطى لمستقيم :

مبرهنة 4 :

ومنه E_1 سطح كرة مركزها $\omega\left(\frac{-17}{5}; 2; \frac{9}{5}\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{\sqrt{5}}$ أي $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2- تعيين E_2 :

نفرض $M(x; y; z)$ لدينا : $\overrightarrow{AM}(x+1; y-2; z-3)$, $\overrightarrow{BC}(5; -1; -3)$

ولدينا : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 5(x+1) + (y-2)(-1) + (z-3)(-3)$

$$= 5x + 5 - y + 2 - 3z + 9 = 5x - y + 2z + 16$$

وعليه : بما أن : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = -4$ فإن : $5x - y - 2z + 16 = -4$

$$5x - y - 2z + 20 = 0$$

ومنه E_2 هو مستوي حيث $\vec{n}(5; -4; -2)$ شعاع ناظمي له .

(D) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}(a; b; c)$ ويشمل النقطة $A(\alpha; \beta; \gamma)$.

تكون نقطة M من المستقيم (D) إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها $(x; y; z)$ العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$$

حيث t عدد حقيقي .

تعريف 2 :
العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$$

تشكل تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة و شعاع

توجيهه $\vec{u}(a; b; c)$. t هو الوسيط .

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -5t - 4 \\ z = -\frac{1}{2}t + 1 \end{cases} \quad \text{فمثلا : تشكل تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة}$$

$$\vec{u}\left(2; -5; \frac{1}{2}\right) \text{ وشعاع توجيهه } A(3; -4; 1)$$

2- التمثيل الوسيط لمستو :
مبرهنة 5 :

ليكن الشعاعان $\vec{u}(a; b; c)$, $\vec{v}(a'; b'; c')$ ولتكن النقطة $A(\alpha; \beta; \gamma)$

وليكن المستوي (P) المزود بمعلم $(A; \vec{u}; \vec{v})$

تكون نقطة M نقطة من (P) إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها $(x; y; z)$ العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases} \quad \text{حيث } t, t' \text{ عدديان حقيقيان.}$$

تعريف 3 :
نقول عن العلاقات :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

أنها تشكل تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل

$A(\alpha; \beta; \gamma)$ وشعاعي توجيهه $\vec{u}(a; b; c), \vec{v}(a'; b'; c')$, t و t' هما الوسيطين
III- المعادلة الديكارتية لمستو :
مبرهنة 6 :

كل معادلة من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث a و b و c غير معدومة جميعها هي معادلة مستو.

وفي حالة معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فإن الشعاع $\vec{u}(a; b; c)$ هو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

مبرهنة 7 :

ليكن المستوي (P) الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ والمستوي (P') الذي معادلته : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

يتوازي المستويان (P) و (P') إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم k بحيث :

$$a' = ka \quad \text{و} \quad b' = kb \quad \text{و} \quad c' = kc$$

وفي الحالات الأخرى (P) و (P') متقاطعان.

مبرهنة 8 :

يعين المستقيم في الفضاء بإعطاء معادلتين مستويين متقاطعان في هذا المستقيم ملاحظة :

في الفضاء المستقيم ليس له معادلة ديكارتية .

التمارين

التمرين 1 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط

$$C(-1; 2; -2), B(2; -2; 4), A(-2; +1; -3)$$

(1) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطتان A و B

(2) عين تمثيلا وسيطا للمستوى (P) الذي يشمل النقط A و B و C.

التمرين 2 :

تعطى في الفضاء المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط $B(2; 2; 3), A(-1; 2; 1)$

$C(1; -2; -1)$. أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

التمرين 3 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط :

$$\vec{u}(-1; -2; -3), A(-1; -1; -1), B(2; 3; -2), C(-1; 3; -1)$$

1- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (OAB)

2- عين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل C ويكون \vec{u} شعاعا ناظما له.

3- عين نقط تقاطع المستوى (OAB) والمستوى (P)

التمرين 4 :

(1) عين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقطة O يكون $\vec{u}(1; 2; 4)$ شعاعا ناظما له.

2- عين تمثيلا وسيطيا للمستوى (P') الذي يشمل النقطة $A(-2; -2; 2)$ و شعاعي

$$\vec{v}(1; -1; 3) \text{ و } \vec{u}(-1; 1; 4)$$

3- استنتج المعادلة الديكارتية للمستوى (P')

4- عين نقط تقاطع (P) و (P') باستعمال المعادلتين الديكارتيتين.

التمرين 5 :

يعطى المستويان (P) و (P') بمعادلتيهما : $x - 2y + 3z - 4 = 0$ و

$$-2x + 3y - z + 2 = 0. \text{ عين التمثيل الوسيطى لمستقيم تقاطع (P) و (P')}$$

التمرين 6 :

يعطى التمثيل الوسيطى للمستوى (P) والمستقيم (P') كمايلي :

$$(P) : \begin{cases} x = 3u - 2v - 4 \\ y = 5u - 4v + 1 \\ z = -2u + 2v - 3 \end{cases} \quad (D) : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 4 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

التمرين 7 :

تعطى ثلاث مستقيمات $(P_1), (P_2), (P_3)$ بمعادلات ديكارتية :

$$(P_1) : x + 4y - z = 0; (P_2) : x + y + z - 6 = 0; (P_3) : x + 2y - z - 4 = 0$$

عين نقط تقاطعهما.

التمرين 8 :

$$(P) : \begin{cases} x = t - t' + 1 \\ y = -t + 2t' \\ z = 2t - t' - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (P') : \begin{cases} x = -u + 2v - 1 \\ y = u - v \\ z = -2u + v - 1 \end{cases}$$

عين نقط تقاطع (P) و (P').

التمرين 9 :

ABCEFGH مكعب في الفضاء. $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ معلم للفضاء.

$$(P) \text{ مستو معادلته : } 2x + 4y + 2z - 1 = 0$$

(1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات (AB) و (AD) و (AE)

(2) عين نقط تقاطع المستوى (P) مع الحروف [AB] و [AD] و [AE] للمكعب

ABCEFGH. (3) عين محيط مضلع تقاطع (P) و حروف المكعب.

التمرين 10 :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستقيمين

(D_1) و (D_2) المعرفين بتمثيليهما الوسيطيين :

$$(D_1) : \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases} \quad (D_2) : \begin{cases} x = t' + 5 \\ y = t' + 3 \\ z = -t' - 5 \end{cases}$$

(1) بين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان.

(2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) الذي يشمل المستقيمان (D_1) و (D_2) .

(3) استنتج المعادلة الديكارتية للمستوى (P).

التمرين 1 :

(1) التمثيل الوسيطى للمستقيم (D)

تكون نقطة $M(x; y; z)$

$$t \cdot \overline{AM} = t \cdot \overline{AB} \quad \text{إذا فقط إذا كان} \quad \overline{AM} = t \cdot \overline{AB} \quad \text{من المستقيم (D)}$$

عدد حقيقى

$$(D) \quad \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = -3t + 1 \\ z = 7t - 3 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} x + 2 = t(2 + 2) \\ y - 1 = t(-2 - 1) \\ z + 3 = t(4 + 3) \end{cases}$$

(2) تعيين التمثيل الوسيطى للمستوى (P)

تكون نقطة $M(x; y; z)$: $\overline{AM} = t\overline{AB} + t'\overline{AC}$ من المستوى (P) إذا فقط إذا كان

$$\overline{AM} = t\overline{AB} + t'\overline{AC} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} x + 2 = t(2 + 2) + t'(-1 + 2) \\ y - 1 = t(-2 - 1) + t'(2 - 1) \\ z + 3 = t(4 + 3) + t'(-2 + 3) \end{cases}$$

و عليه

$$(P) : \begin{cases} x = 4t + t' - 2 \\ y = -3t + t' + 1 \\ z = 7t + t' - 3 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} x + 2 = t(2 + 2) + t'(-1 + 2) \\ y - 1 = t(-2 - 1) + t'(2 - 1) \\ z + 3 = t(4 + 3) + t'(-2 + 3) \end{cases}$$

التمرين 2 : المعادلة الديكارية للمستوى (ABC) :

لدينا : $\overline{AC} (2; -4; -2)$, $\overline{AB} (3; 0; 2)$: الشعاعان \overline{AB} و \overline{AC} ليس لهما نفس الحامل . تكون نقطة $M(x; y; z)$ من المستوى (ABC) إذا فقط إذا كان : $\overline{AM} = t\overline{AB} + t'\overline{AC}$ و عليه : $\begin{cases} x + 1 = t(3) + t'(2) \\ y - 2 = t(0) + t'(-4) \\ z - 1 = t(2) + t'(-2) \end{cases}$ بجمع (1) و (3) نجد : $x + z = 5t$ ومنه : $t = \frac{1}{5}(x + z)$ ومنه : $t' = \frac{2 - y}{4}$ بالتعويض في (1) نجد : $x = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}z + 1 - \frac{1}{2}y - 1$ ومنه : $x = \frac{3}{5}(x + z) + 2 \times \frac{1}{4}(2 - y) - 1$ أي $x = \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}z + \frac{1}{2}y - 1$ ومنه : $x - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}z - \frac{1}{2}y = 0$ $4x - 6z + 5y = 0$ وعليه : $x - \frac{3}{5}z - \frac{1}{2}y = 0$

التمرين 3 :

(OAB) : التمثيل الوسيطى للمستوى (OAB) :

$$\overline{OB} (2; 3; -2) , \overline{OA} (-1; -1; 1)$$

طية الشعاعان \overline{OA} و \overline{OB} ليس لهما نفس الحامل . تكون نقطة $M(x; y; z)$ من المستوى (OAB) إذا فقط إذا كان : $\overline{OM} = t\overline{OA} + t'\overline{OB}$ ومنه : $\begin{cases} x = -t + 2t' \\ y = -t + 3t' \\ z = -t - 2t' \end{cases}$ (OAB) :

المعادلة الديكارية للمستوى (P) :

$$\text{معادلة (P) من الشكل : } -x - 2y - 3z + \alpha = 0 \quad \text{وبما أن } C \in (P) \text{ فإن}$$

$$\alpha = 2 \quad \text{وعليه} \quad 1 - 2(3) - 3(-1) + \alpha = 0$$

$$(P) : -x - 2y - 3z + 2 = 0$$

(1) تعيين نقطة تقاطع (OAB) و (P) :

$$\begin{cases} x = -t + 2t' \\ y = -t + 3t' \\ z = -t - 2t' \end{cases}$$

حل الجملة :

$$\begin{cases} -x - 2y - 3z + 2 = 0 \\ -x - 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

نعم قيم x و y و z في معادلة المستوى فنجد :

$$-(-t + 2t') - 2(-t + 3t') - 3(-t - 2t') + 2 = 0$$

$$6t - 2t' + 2 = 0 \quad \text{أي} \quad t - 2t' + 2 = 0$$

$$6t - 2t' + 2 = 0 \quad \text{وعليه} \quad t' = 3t + 1$$

$$\begin{cases} x = -t + 2(3t + 1) \\ y = -t + 3(3t + 1) \\ z = -t - 2(3t + 1) \end{cases}$$

$$(P) \cap (OAB) : \begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = 8t + 3 \\ z = -7t - 2 \end{cases}$$

$$\text{ومنه المستوى (P) و المستوى (OAB) يتقاطعان في المستقيم (\Delta) الذي يشمل النقطة}$$

$$B(2; 3; -2) \text{ و شعاع توجيهه } \vec{v}(5; 8; -7)$$

التمرين 4 : تعيين المعادلة الديكارية للمستوى (P) :

$$x + 2y + 4z + c = 0$$

$$x + 2y + 4z + c = 0$$

وبما أن $O \in (P)$ فإن $c = 0$ وعليه $(P) : x + 2y + 4z = 0$

2- التمثيل الوسيط للمستوى (P') :

تكون نقطة $M(x; y; z)$ من (P') إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$

$$(P) : \begin{cases} x = -t + t' - 2 \\ y = t - t' - 2 \\ z = 4t + 3t' + 2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x + 2 = -t + t' \\ y + 2 = t - t' \\ z - 2 = 4t + 3t' \end{cases} \quad \text{ومنه} :$$

3- استنتاج المعادلة الديكارسية للمستوى (P') :

$$\begin{cases} x = -t + t' - 2 \dots (1) \\ y = t - t' - 2 \dots (2) \\ z = 4t + 3t' + 2 \dots (3) \end{cases} \quad \text{لدينا} :$$

نجمع (1) و (2) نجد : $x + y = -4$ ومنه : $x + y + 4 = 0$

وهي المعادلة الديكارسية للمستوى (P')

4- تعيين نقط تقاطع (P) و (P') :

نحل الجملة : $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \dots (1) \\ x + y + 4 = 0 \dots (2) \end{cases}$ من (2) : $x = -y - 4$ وبالتعويض في (1)

نجد : $-y - 4 + 2y + 4z = 0$ أي : $y + 4z - 4 = 0$ وبالتالي :

$$z = \frac{1}{4}(-y + 4)$$

$$\begin{cases} x = -t - 4 \\ y = t \\ z = -\frac{1}{4}t + 1 \end{cases} \quad \text{وبوضع } y = t \text{ نجد} : \begin{cases} x = -y - 4 \\ y = y \\ z = -\frac{1}{4}y + 1 \end{cases} \quad \text{أي} : \begin{cases} x = -y - 4 \\ z = -\frac{1}{4}y + 1 \\ y = y \end{cases} \quad \text{إذن} :$$

وهو التمثيل الوسيط لمستقيم (D) يشمل النقطة $B(-4; 0; 1)$ وشعاع توجيهه

$$\vec{w} \left(-1; 1; -\frac{1}{4} \right) \quad \text{وعليه} \quad (P) \text{ و } (P') \text{ يتقاطعان وفق المستقيم (D)}$$

التمرين 5 :

تعيين مستقيم التقاطع بالتمثيل الوسيط :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \dots (1) \\ -2x + 3y - z + 2 = 0 \dots (2) \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

من (1) : $x = 2y - 3z + 4 \dots$ بالتعويض في عبارة x نجد :

إذن : $-2(2y - 3z + 4) + 3y - z + 2 = 0$ وعليه : $-y + 5z - 6 = 0$

$y = 5z - 6$ بالتعويض في x نجد : $x = 2(5z - 6) - 3z + 4$

بالتالي $x = 7z - 8$

$$\begin{cases} x = 7t - 8 \\ y = 5t - 6 \\ z = t \end{cases} \quad \text{الآن} : \begin{cases} x = 7z - 8 \\ y = 5z - 6 \\ z = z \end{cases} \quad \text{وبوضع } z = t \text{ نجد} :$$

وهو التمثيل الوسيط لمستقيم (D) يشمل النقطة $A(-8; -6; 0)$ وشعاع توجيهه

$\vec{u}(7; 5; 1)$ وبالتالي (P) و (P') يتقاطعان وفق (D)

التمرين 6 :

تعيين تقاطع (P) و (D) .

$$\begin{cases} t - 1 = 3u - 2v - 4 \\ -t + 4 = 5u - 4v + 1 \\ 2t + 3 = -2u + 2v - 3 \end{cases} \quad \text{نحل الجملة المكونة من المعادلات الستة السابقة فنجد}$$

$$\begin{cases} t - 3u + 2v + 3 = 0 \dots (1) \\ -t - 5u + 4v + 3 = 0 \dots (2) \\ 2t + 2u - 2v + 6 = 0 \dots (3) \end{cases} \quad \text{وعليه} :$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد} : -8u + 6v + 6 = 0 \quad \text{ومنه} : u = \frac{1}{8}(6v + 6) \quad \text{أي}$$

$$u = \frac{1}{4}(3v + 3) \quad \text{بالتعويض في (3) نجد} :$$

$$2t + 2 \cdot \frac{1}{4}(3v + 3) - 2v + 6 = 0$$

$$\text{ومنه} : 2t + \frac{1}{2}(3v + 3) - 2v + 6 = 0 \quad \text{أي} :$$

$$4t + 3v + 3 - 4v + 12 = 0 \quad \text{وعليه} : 2t + \frac{3}{2}v + \frac{3}{2} - 2v + 6 = 0$$

$$\text{ومنه} : 4t - v + 15 = 0 \quad \text{وعليه} : t = \frac{1}{4}(v - 15)$$

$$\text{بالتعويض في (1) : } \frac{1}{4}(v - 15) - \frac{3}{4}(3v + 3) + 2v + 3 = 0$$

$$v - 15 - 9v - 9 + 8v + 12 = 0 \text{ وعليه}$$

4

ومنه هذا مستحيل $-21 = 0$

إذن (P) و (D) لا يتقاطعان.

التمرين 7 :

تعيين نقط تقاطع (P_1) و (P_2) و (P_3) :

$$\begin{cases} x + 4y - Z = 0 \dots (1) \\ x + y + Z - 6 = 0 \dots (1) \\ x + 2y - Z - 4 = 0 \dots (1) \end{cases} \text{ نحل الجملة :}$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد : } 2x + 5y - 6 = 6 \text{ ومنه : } x = \frac{1}{2}(-5y + 6)$$

$$\text{بالتعويض في (3) نجد : } -\frac{5}{2}y + 3 + 2y - Z - 4 = 0$$

$$\text{وعليه : } \frac{-5y + 6 + 4y - 2Z - 8}{2} = 0 \text{ ومنه : } -y - 2Z - 2 = 0$$

$$\text{إذن : } Z = \frac{1}{2}(-y - 2) \text{ وبالتعويض في (1) نجد :}$$

$$-\frac{5}{2}y + 3 + 4y + \frac{1}{2}y + 1 = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\frac{-5y + 6 + 8y + y + 2}{2} = 0 \text{ أي : } 4y + 8 = 0 \text{ وبالتالي : } y = -2$$

$$\text{ومنه } x = 8 \text{ و } Z = 0$$

$$\text{إذن نقطة التقاطع هي : } A(8; -2; 0)$$

التمرين 8 :

تعيين نقط تقاطع (P) و (P') :

$$\begin{cases} t - t' + 1 = -u + 2v - 1 \\ -t + 2t' = u - v \\ 2t - t' - 1 = -2u + v + 1 \end{cases}$$

نحل الجملة المكونة من المعادلات الستة السابقة فنجد :

$$\begin{cases} t - t' + u - 2v + 2 = 0 \dots (1) \\ -t + 2t' - u + v = 0 \dots (2) \\ 2t - t' + 2u - v - 2 = 0 \dots (3) \end{cases} \text{ وعليه :}$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد : } t' - v + 2 = 0 \text{ وعليه : } t' = v - 2$$

$$\text{بالتعويض في (3) نجد : } 2t - v + 2 + 2u - v - 2 = 0$$

$$\text{أي : } 2t + 2u - 2v = 0 \text{ ومنه } t + u - v = 0 \text{ وعليه : } t = -u + v$$

$$\text{بمض t و } t' \text{ بقيمتيهما في (1) فنجد : } -u + v + 2 + u - 2v + 2 = 0$$

$$\text{وبالتالي : } -2v + 4 = 0 \text{ أي : } v = 2 \text{ وعليه : } t' = 0 \text{ و } t = -u + 2$$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ 3 = 2t - 1 \end{cases}$$

بالتعويض في التمثيل الوسيطى للمستوى (P) نجد :

$$3 = 2t - 1$$

وهو التمثيل الوسيطى لمستقيم (Δ) يشمل النقطة $A(1; 0; -1)$ وشعاع

وجهه $\vec{w}(1; -1; 2)$ ومنه (P) و (P') يتقاطعان وفق (Δ) .

التمرين 9 :

(1) التمثيلات الوسيطية :

$$\begin{aligned} (AB) : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (AD) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (AE) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) تعيين نقط تقاطع (P) مع الحروف :

• مع الحرف [AB] :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ نحل الجملة :}$$

$$\text{نجد : } 2t - 1 = 0 \text{ ومنه } t = \frac{1}{2} \text{ وعليه نقطة التقاطع هي : } p\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$$

• مع الحرف [AD] :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \text{ نحل الجملة :}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = -4 \end{cases}$$

اذن : (D_1) و (D_2) متقاطعان في النقطة $A(4; 0; -4)$

(2) تعيين التمثيل الوسيط للمستوى (P) :

شعاع توجيه (D_1) هو $\vec{u}(-1; 1; 2)$ وشعاع توجيه (D_2) هو $\vec{v}(1; 3; -1)$.

ولدينا \vec{u} و \vec{v} ليس لهما نفس الحامل. النقطة $A(3; 1; -2)$ تنتمي إلى (D_1) ومنه (P)

يشمل A و الشعاعين \vec{u} و \vec{v} .

تكون نقطة $M(x; y; z)$ من (P) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} x = -t + t' + 3 \\ y = t + t' + 1 \\ z = 2t - t' - 2 \end{cases} \text{ اي } \begin{cases} x - 3 = -t + t' \\ y - 1 = t + t' \\ z + 2 = 2t - t' \end{cases} \text{ وعليه : } \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$$

وهو التمثيل الوسيط للمستوى (P) .

(3) تعيين المعادلة الديكارتية للمستوى (P) :

$$\begin{cases} x = -t + t' + 3 \dots (1) \\ y = t + t' + 1 \dots (2) \\ z = 2t - t' - 2 \dots (3) \end{cases} \text{ لدينا :}$$

بجمع (1) و (2) : $x + y = 2t' + 4$ ومنه : $t' = \frac{1}{2}(x + y - 4)$

فنجد : $4t - 1 = 0$ ومنه $t = \frac{1}{4}$ وعليه نقطة التقاطع هي : $S\left(0; \frac{1}{4}; 0\right)$ مع الحرف $[AE]$:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ نحل الجملة :}$$

فنجد : $2t - 1 = 0$ ومن $t = \frac{1}{2}$ وعليه نقطة التقاطع هي : $k\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ (3) تعيين محيط المثلث psk :

$$\overrightarrow{ps}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 0\right) \text{ و } \overrightarrow{pk}\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{ks}\left(0; \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$ps = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ ومنه :}$$

$$pk = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ks = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{4}$$

$$L = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2}$$

التمرين 10 :
(1) تبين أن (D_1) و (D_2) متقاطعان :

$$\begin{cases} t + t' + 2 = 0 \dots (1) \\ t - 3t' - 2 = 0 \dots (2) \\ 2t + t' + 3 = 0 \dots (3) \end{cases} \text{ ونه : } \begin{cases} -t + 3 = t' + 5 \\ t + 1 = 3t' + 3 \\ 2t - 2 = -t' - 5 \end{cases} \text{ نحل الجملة :}$$

ب طرح : (2) من (1) نجد : $4t' + 4 = 0$ اي : $t' = -1$

15 - قابلية القسمة في \mathbb{Z}

١١ قابلية القسمة في \mathbb{Z} :

• مثال 1 :

قول عن عدد صحيح a أنه يقسم عددا صحيحا b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح

k بحيث : $b = ak$.

• مبرهنات :

١ إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c .

٢ إذا كان a يقسم b فإن a يقسم kb و ka يقسم kb حيث k عدد صحيح.

٣ إذا كان a يقسم b و c فإن a يقسم $bx + cy$ حيث x و y عدنان صحيحان

٤ القسمة الإقليدية في \mathbb{Z} :

• مبرهنة 4 :

إذا كان a عددا صحيحا و كان b عددا طبيعيا غير معدوم فإنه توجد ثنائية وحيدة $(q; r)$

من الأعداد الصحيحة تحقق :
$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$
 حيث : q هو حاصل القسمة و r هو باقى

القسمة.

• مثال 1 :

$$17 = 3 \times 5 + 2, \quad b = 3, \quad a = 17, \quad r = 2, \quad q = 5$$

• مثال 2 :

$$-27 = 5(-6) + 3, \quad b = 5, \quad a = -27, \quad r = 3, \quad q = -6$$

١١١ القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين :

• مبرهنة 5 :

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين هو آخر باقى غير معدوم

للسمات المتتالية المنجزة في خوارزمية إقليدس.

• مثال :

$$PGCD(24, 149)$$

الحل :

$$24 = 5 \times 4 + 4 \quad \text{و} \quad 149 = 24 \times 6 + 5$$

$$4 = 1 \times 4 + 0 \quad \text{و} \quad 5 = 4 \times 1 + 1$$

و منه $PGCD(149, 24) = 1$ و منه العدان 149 و 24 أوليان فيما بينهما.

• مبرهنة 6 :

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم

لأصغرهما المشترك الأكبر.

• مثال :

من مجموعة القواسم المشتركة للعددين 42 و 660.

بالتعويض في (3) نجد : $z = 2t - \frac{1}{2}(x + y - 4) - 2$

ومنه : $2z = 4t - x - y$ أي $z = \frac{4t - x - y + 4 - 4}{2}$

إذن : $4t = x + y + 2z$ أي $t = \frac{1}{4}(x + y + 2z)$

نعوض t و t' بقيمتيهما في المعادلة (1) فنجد :

$$v = -\frac{1}{4}(x + y + 2z) + \frac{1}{2}(x + y - 4) + 3$$

$$v = \frac{-x - y - 2z + 2x + 2y - 8 + 12}{4}$$

$$1v = x + y - 2z + 4$$

وعليه : $3x - y + 2z - 4 = 0$ وهي المعادلة الديكارتيّة للمستوى (P)

الحل :

تعيين $PGCD(660; 42)$:

$$660 = 42 \times 15 + 30$$

$$42 = 30 \times 1 + 12$$

$$30 = 12 \times 2 + 6$$

$$12 = 6 \times 2 + 0$$

إذن : $PGCD(660; 42) = 6$

و منه القواسم المشتركة للعددين 42 و 660 هي قواسم العدد 6 وهي : 1 ; 2 ; 3 ; 6 .

خواص :

$$k \in \mathbb{Z}^* \text{ و } PGCD(ka; kb) = KPGCD(a; b) \quad (1)$$

$$(2) \text{ إذا كان } PCGD(a; b) = d \text{ فإن : } \begin{cases} a = da' \\ b = db' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

التمرين 7 :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 15488 \\ PGCD(a; b) = 8 \end{cases}$$

عين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق :

التمرين 8 :

(1) عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث $n - 1$ يقسم $n + 3$

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن : $PGCD(n - 1; n^2 + 2n - 1) = 1$

عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث :

$$(n + 3)(n^2 + 2n - 2) \text{ يقسم } (n - 1)(2n^3 + 1)$$

التمرين 9 :

خذ قسمة عدد طبيعي غير معدوم a على العدد 45 فإن الباقي هو مربع الحاصل. عين قيمة a .

التمرين 10 :

a عدد طبيعي. حيث $a \geq 3$ ، b عدد طبيعي حيث : $b \geq 2$. إذا كان حاصل قسمة $a - 1$

على b هو q فما هو حاصل قسمة $ab^n - 1$ على b^{n+1} ؟

الحلول

التمرين 1 :

عين x و y :

$$x^2 - y^2 = 80$$

لدينا : $(x - y)(x + y)$ حيث $x - y < x + y$

$$(1) \text{ بالجمع نجد : } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 80 \end{cases} \text{ بالجمع نجد : } 2x = 81 \text{ و منه } x = \frac{81}{2} \text{ (مرفوض)}$$

$$(2) \text{ بالجمع نجد : } \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 40 \end{cases} \text{ بالجمع نجد : } 2x = 42 \text{ و منه } x = 21 \text{ و عليه : } y = 19$$

$$(3) \text{ بالجمع نجد : } \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 20 \end{cases} \text{ بالجمع نجد : } 2x = 24 \text{ و منه } x = 12 \text{ و عليه : } y = 8$$

$$(4) \text{ بالجمع نجد : } \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 16 \end{cases} \text{ بالجمع نجد : } 2x = 21 \text{ و منه } x = \frac{21}{2} \text{ (مرفوض)}$$

$$(5) \text{ بالجمع نجد : } \begin{cases} x - y = 8 \\ x + y = 10 \end{cases} \text{ بالجمع نجد : } 2x = 18 \text{ و منه } x = 9 \text{ و عليه : } y = 1$$

التمارين

التمرين 1 :

عين قيم الأعداد الصحيحة الموجبة : x و y بحيث : $x^2 - y^2 = 80$

التمرين 2 :

عين قيم الأعداد الصحيحة x ، y بحيث : $xy - 8x - 30 = 0$

التمرين 3 :

عند قسمة كل من العددين 79611 ، 50807 على عدد طبيعي a فإن الباقيان هما 7 ، 11 على الترتيب . عين العدد a علماً أن $a > 300$.

التمرين 4 :

$PGCD(a; 72) = 8$ عدد طبيعي حيث

عين كل الأعداد a الأصغر من 150 و تحقق الشرط السابق .

التمرين 5 :

$$\begin{cases} a + b = 3360 \\ PGCD(a; b) = 84 \\ a \leq b \end{cases} \text{ عين العددين الطبيعيين } a \text{ و } b \text{ حيث :}$$

التمرين 6 :

$$\begin{cases} a - b = 82368 \\ PGCD(a; b) = 24 \end{cases} \text{ عين العددين الطبيعيين } a \text{ و } b \text{ علماً أن :}$$

التمرين 2 :
تعيين قيم x و y :

$$xy - 8x - 30 = 0$$

وعليه : $x(y - 8) = 30$

- * $x = 1$ و $y - 8 = 30$ أي $x = 1$ و $y = 38$
- * $x = 2$ و $y - 8 = 15$ أي $x = 2$ و $y = 23$
- * $x = 3$ و $y - 8 = 10$ أي $x = 3$ و $y = 18$
- * $x = 5$ و $y - 8 = 6$ أي $x = 5$ و $y = 14$
- * $x = 6$ و $y - 8 = 5$ أي $x = 6$ و $y = 13$
- * $x = 10$ و $y - 8 = 3$ أي $x = 10$ و $y = 11$
- * $x = 15$ و $y - 8 = 2$ أي $x = 15$ و $y = 10$
- * $x = 30$ و $y - 8 = 1$ أي $x = 30$ و $y = 9$
- * $x = -1$ و $y - 8 = -30$ أي $x = -1$ و $y = -22$
- * $x = -2$ و $y - 8 = -15$ أي $x = -2$ و $y = -7$
- * $x = -3$ و $y - 8 = -10$ أي $x = -3$ و $y = -2$
- * $x = -5$ و $y - 8 = -6$ أي $x = -5$ و $y = 2$
- * $x = -6$ و $y - 8 = -5$ أي $x = -6$ و $y = 3$
- * $x = -10$ و $y - 8 = -3$ أي $x = -10$ و $y = 5$
- * $x = -15$ و $y - 8 = -2$ أي $x = -15$ و $y = 6$
- * $x = -30$ و $y - 8 = -1$ أي $x = -30$ و $y = 7$

التمرين 3 :

لدينا :
$$\begin{cases} 79600 = a.q_1 \\ 50800 = a.q_2 \end{cases}$$
 ومنه
$$\begin{cases} 79611 = a.q_1 + 11 \\ 50807 = a.q_2 + 7 \end{cases}$$

ومنه a قاسم مشترك للعددين 79600 و 50800 وبالتالي a يقسم $PGCD(79600, 50800)$

* حساب $PGCD(79600, 50800)$

$$\begin{aligned} 79600 &= 50800 \times 1 + 28800 \\ 50800 &= 28800 \times 1 + 22000 \\ 28800 &= 22000 \times 1 + 6800 \\ 22000 &= 6800 \times 3 + 1600 \\ 6800 &= 1600 \times 4 + 400 \\ 1600 &= 400 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

ومنه : $PGCD(79600, 50800) = 400$
وعليه : a يقسم 400 وبالتالي : $a = 400$

التمرين 4 :
تعيين قيم a :

بما أن $PGCD(a; 72) = 8$ فإن : $a = 8a'$ و $72 = 8 \times 9$ حيث a' و 9 أوليان فيما

بينهما . لدينا : $a < 200$ ومنه : $8a' < 150$ وعليه : $a' \leq 18$

قيم a' هي : 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17 .

ومنه قيم a هي : 8, 16, 32, 40, 56, 64, 80, 88, 104, 112, 128, 136 .

التمرين 5 :
تعيين a و b :

بما أن $PGCD(a; b) = 84$ فإن :
$$\begin{cases} a = 84a' \\ b = 84b' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

ومن أن $a + b = 3360$ فإن : $84a' + 84b' = 3360$

وعليه $84(a' + b') = 3360$ ومنه : $a' + b' = 40$

- * $a' = 1$ و $b' = 39$ ومنه $a = 84$ و $b = 3276$
- * $a' = 3$ و $b' = 37$ ومنه $a = 252$ و $b = 3108$
- * $a' = 7$ و $b' = 33$ ومنه $a = 588$ و $b = 2772$
- * $a' = 9$ و $b' = 31$ ومنه $a = 756$ و $b = 2604$
- * $a' = 11$ و $b' = 29$ ومنه $a = 924$ و $b = 2436$
- * $a' = 13$ و $b' = 27$ ومنه $a = 1092$ و $b = 2268$
- * $a' = 17$ و $b' = 23$ ومنه $a = 1428$ و $b = 1932$
- * $a' = 19$ و $b' = 21$ ومنه $a = 1596$ و $b = 1764$

التمرين 6 :
تعيين a و b :

بما أن $PGCD(a; b) = 24$ فإن :
$$\begin{cases} a = 24a' \\ b = 24b' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

ولدينا $a.b = 82368$ وعليه : $24a'.24b' = 82368$

ومنه $576a'b' = 82368$ وعليه : $a'b' = 143 = 13 \times 11$

* $a' = 1$ و $b' = 143$ ومنه $a = 24$ و $b = 3432$

* $a' = 143$ و $b' = 1$ ومنه $a = 3432$ و $b = 24$

* $a' = 11$ و $b' = 13$ ومنه $a = 264$ و $b = 312$

* $a' = 13$ و $b' = 11$ ومنه $a = 312$ و $b = 264$

التمرين 7 :
تعيين a و b :

$$\begin{cases} a = 8a' \\ b = 8b' : \text{فإن } PGCD(a; b) = 8 \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{ومنه : } (8a')^2 + 2(8b')^2 &= 14488 \\ 64a'^2 + 2(64b'^2) &= 15488 \end{aligned}$$

$$a'^2 + 2b'^2 = 242 \quad \text{ومنه} \quad 64[a'^2 + 2b'^2] = 15488$$

$$a'^2 = 2(121 - b'^2) \quad \text{وعليه} \quad a'^2 = 242 - 2b'^2 = 2(121 - b'^2)$$

$$\text{فيكون } 121 - b'^2 \geq 0 \quad \text{ومنه : } b'^2 \leq 121 \quad \text{إن : } b' \leq 11$$

$$a' = 15,49 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 240 : b' = 1 *$$

$$a' = 15,29 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 234 : b' = 2 *$$

$$a' = 14,96 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 224 : b' = 3 *$$

$$a' = 14,49 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 210 : b' = 4 *$$

$$a' = 13,85 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 192 : b' = 5 *$$

$$a' = 13,03 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 170 : b' = 6 *$$

$$b = 96 \quad \text{و} \quad a = 56 \quad \text{عليه} \quad a' = 12 \quad \text{ومنه} \quad a'^2 = 144 : b' = 7 *$$

$$a' = 10,67 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 144 : b' = 8 *$$

$$a' = 8,94 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 80 : b' = 9 *$$

$$a' = 6,48 \dots \dots \text{مرفوض} \quad a'^2 = 42 : b' = 10 *$$

$$a' = 0 \quad \text{ومنه} \quad a'^2 = 0 : b' = 11 *$$

$$\text{مرفوض لأن } a' \text{ و } b' \text{ أوليان فيما بينهما. إن : } a = 56 \quad \text{و} \quad b = 96$$

التمرين 8 :
تعيين n حيث $n-1$ يقسم $n+3$:

$$n-1 \text{ يقسم } n+3 \text{ تكافئ } n-1 \text{ يقسم } (n+3) - (n-1)$$

$$\text{وعليه } n-1 \text{ يقسم } 4 \text{ أي قيم } n-1 \text{ هي : } 1, 2, 3, 4$$

$$\text{ومنه قيم } n \text{ هي : } 2, 3, 4, 5$$

$$(2) \text{ إثبات أن : } PGCD(n-1; n^2 + 2n - 2) = 1$$

ليكن m عدد صحيح بحيث $|m|$ عدد أولي و m يقسم $n-1$ و $n^2 + 2n - 2$.

ومنه : m يقسم $n-1$ و يقسم $n^2 + 2(n-1)$ وبالتالي : m يقسم n^2 و $(n-1)$

وعليه m يقسم n و $(n-1)$ لأن m أولي.

لأن n و $n-1$ أوليان فيما بينهما (عددان متتابعان)

ومنه m يقسم $PGCD(n; n-1)$ أو m يقسم 1

$$\text{وعليه } m = 1 \text{ أو } m = -1 \quad \text{إن : } PGCD(n-1; n^2 + 2n - 2) = 1$$

(1) تعيين الأعداد الصحيحة n بحيث $(n-1)(2n^3 + 1)$ يقسم

$$(n+3)(n^2 + 2n - 2)$$

$$(2) \text{ نضع : } A(n) = (n-1)(2n^3 + 1)$$

$$\text{و } B(n) = (n+3)(n^2 + 2n - 2)$$

إذا كان $(n-1)(2n^3 + 1)$ يقسم $(n+3)(n^2 + 2n - 2)$

فإن $(n-1)$ يقسم $n+3$ من أجل قيم n في (1)

لأن $(n-1)$ أولى مع $n^2 + 2n - 2$ وعليه قيم n هي 5, 3, 2, 0, -1, -3

$$\text{وعليه} \quad A(-3) = (-3-1)(2(-3)^3 + 1) = 212$$

$$A(-1) = (-1-1)(2(-1)^3 + 1) = 2$$

$$A(0) = (0-1)(2 \times 0^3 + 1) = -1$$

$$A(2) = (2-1)(2 \times 2^3 + 1) = 17$$

$$A(3) = (3-1)(2 \times 3^3 + 1) = 110$$

$$A(5) = (5-1)(2 \times 5^3 + 1) = 1004$$

$$B(-3) = (-3+3)((-3)^2 + 2(-3) - 2) = 0$$

$$B(-1) = (-1+3)((-1)^2 + 2(-1) - 2) = -6$$

$$B(0) = (0+3)(0^2 + 2(0) - 2) = -6$$

$$B(2) = (2+3)(2^2 + 2(2) - 2) = 30$$

1 - الموافقات بترديد n :

تعريف :

نقول عن عددين صحيحان x و y انهما متوافقان بترديد n ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$) إذا وفقط

كان : $x - y$ مضاعفا للعدد n أي n يقسم $x - y$ ونكتب : $x \equiv y[n]$.

أمثلة :

$$5 \equiv 1[2] \quad \text{لأن : } 5 - 1 = 4 \quad \text{وعليه : } 5 - 1 \text{ مضاعف } 2$$

$$19 \equiv 4[3] \quad \text{لأن : } 19 - 4 = 15 \quad \text{وعليه : } 19 - 4 \text{ مضاعف } 3$$

$$23 \equiv -1[2] \quad \text{لأن : } 23 - (-1) = 24 \quad \text{مضاعف } 2 .$$

$$7 \equiv 7[3] \quad \text{لأن : } 7 - 7 = 0 \quad \text{وهو مضاعف } 3 .$$

مبرهنات :

a, b, x, y أعداد صحيحة . n عدد طبيعي غير معدوم ($n \neq 1$)

$$(1) \text{ إذا كان } a \equiv b[n] \text{ و } x \equiv y[n] \text{ فإن : } a + x \equiv b + y[n]$$

$$(2) \text{ إذا كان } x \equiv y[n] \text{ فإن : } x + a \equiv y + a[n]$$

$$(3) \text{ إذا كان } a \equiv b[n] \text{ و } x \equiv y[n] \text{ فإن : } x \times a \equiv y \times b[n]$$

$$(4) \text{ إذا كان } x \equiv y[n] \text{ فإن : } a + x \equiv a + y[n]$$

$$(5) \text{ إذا كان } x \equiv y[n] \text{ و } \lambda \in \mathbb{N}^* \text{ فإن : } \lambda x \equiv \lambda y[n]$$

$$(6) \text{ إذا كان } x \equiv y[n] \text{ و } p \in \mathbb{N} \text{ فإن : } x^p \equiv y^p[n]$$

(7) كل عدد صحيح x يوافق بترديد n ، باقي قسمته على n .

$$\text{أي إذا كان : } x = nq + r \text{ فإن : } x \equiv r[n]$$

$$(8) \text{ يكون العدد الصحيح } a \text{ قابلا للقسمة على } n \text{ إذا وفقط إذا كان : } a \equiv 0[n]$$

11 - التعداد :

1 - نشر عدد طبيعي وفق أساس :

مبرهنة :

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 ، كل عدد طبيعي n يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$N = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

حيث من أجل كل عدد i فإن : $0 \leq a_i \leq x - 1$. $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ و $a_n \neq 0$

$$B(3) = (3+3)(3^2 + 2(3) - 2) = 78$$

$$B(5) = (5+3)(5^2 + 2(5) - 2) = 264$$

و يكون $A(n)$ قاسما للعدد $B(n)$ في حالة $n = -3$

أو $n = -1$ أو $n = 0$.

التمرين 9 :

تعيين a :

نفرض حاصل القسمة q فيكون باقي القسمة q^2

$$\text{ومنه : } \begin{cases} a = q \times 45 + q^2 \\ q^2 < 45 \end{cases} \quad \text{إذن : } \begin{cases} a = 45q + q^2 \\ q \leq 6 \end{cases}$$

ومنه قيم q هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 .

ومنه قيم a هي : 46 ، 94 ، 144 ، 196 ، 250 ، 306 .

التمرين 10 :

تعيين حاصل قسمة $ab^n - 1$ على b^{n+1} :

$$\text{لدينا : } \begin{cases} a - 1 = bq + r \\ r \leq b - 1 \end{cases} \quad \text{بالضرب في } b^n \text{ نجد : } \begin{cases} ab^n - b^n = b^{n+1} + rb^n \\ rb^n \leq b^{n+1} - b^n \end{cases}$$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} ab^n = b^{n+1}q + rb^n + b^n \\ rb^n + b^n \leq b^{n+1} \end{cases} \quad \text{إذن : } \begin{cases} ab^n = b^{n+1}q + (rb^n + b^n) \\ rb^n + b^n \leq b^{n+1} \end{cases}$$

$$\text{ومنه بطرح 1 من الطرفين نجد : } \begin{cases} ab^n - 1 = b^{n+1}q + (rb^n + b^n - 1) \\ rb^n + b^n - 1 < b^{n+1} \end{cases}$$

ومنه حاصل القسمة $ab^n - 1$ على b^{n+1} هو q .

و يكتب A اصطلاحا على الشكل : $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ وهي الكتابة المختصرة للعدد N في النظام الذي أساسه x وتسمى الأعداد $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أرقام هذا النظام . حالات خاصة :

(1) النظام العشري : هو النظام الذي أساسه 10 أي $x = 10$ وأرقامه هي :

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 .

(2) النظام الثنائي : هو النظام الذي أساسه 2 . وأرقامه 1, 0 .

(3) النظام الثماني : هو النظام الذي أساسه 8 . وأرقامه 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 .

(4) النظام الذي أساسه 12 : وأرقامه $\beta, \alpha, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$. حيث

$\beta = 11$ و $\alpha = 10$

الانتقال من نظام أساسه α إلى نظام أساسه β :

يتم ذلك بالانتقال من النظام الذي أساسه α إلى النظام العشري . ثم الانتقال إلى النظام الذي أساسه β .

التمارين

التمرين 1 :

1- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة : 2^n على 7 ثم استنتج باقي

قسمة كل من 2^{2008} و 2^{1954} و $(1418)^{1004}$ على 7 .

2- أثبت أن العدد : $A_n = 2007 \cdot 2^{3n+1} + 1417 \cdot 2^{6n} + 1954$ يقبل القسمة على

7 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 2 :

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$

التمرين 3 :

ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد : $n = 100^{1000000}$ على 13 .

التمرين 4 :

برهن أن : $7^n + 1 \equiv 0[8]$ من أجل : $n = 2k + 1$ و $k \in \mathbb{N}$

ثم عين العدد الطبيعي a بحيث : $7^n + 1 \equiv a[8]$ من أجل $n = 2k$ و $k \in \mathbb{N}$

التمرين 5 :

1- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة كل من العددين 2^n و 10^n على 13 .

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$17 \cdot (1310)^{9n+3} + 24 \cdot (1926)^{12n+7} \equiv 0[13]$$

$$3\text{- برهن أن : } (2012)^{1990} + (1835)^{1991} + 3 \equiv 0[13]$$

$$4\text{- عين العدد الطبيعي } n \text{ بحيث : } 10^n - 2^n \equiv 0[13]$$

التمرين 6 :

$$\text{عين قيم العدد الطبيعي } n \text{ بحيث : } n^2 - 2n + 27 \equiv 0[n-3]$$

التمرين 7 :

n عدد طبيعي غير معطوم .

1- أثبت أن كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته r على n .

2- إذا علمت أن باقي قسمة a على n هو $n-1$ ($n \geq 1$) ما هو باقي قسمة

$2n+1$ على n

3- عين باقي قسمة العدد 415 على 8 ثم استنتج باقي قسمة العدد 831 على 8 .

التمرين 8 :

$$\text{أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن : } 4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$$

التمرين 9 :

$$1\text{- حدد قيم العدد الطبيعي } n \text{ بحيث يكون } n^2 + n + 1 \equiv 0[7]$$

2- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7

$$3\text{- استنتج قيم الأعداد الطبيعية } s \text{ بحيث : } 2^{2s} + 2^s + 1 \equiv 0[7]$$

التمرين 10 :

اكتب في نظام العدد الذي أساسه 9 الأعداد التالية والمكتوبة في النظام العشري :

8540, 1417, 2008, 1962, 1830, 100

التمرين 11 :

a عدد يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 2 كما يلي : 1011011 .

اكتب a في نظام التعداد ذي الأساس 12

التمرين 12 :

$$\text{عين نظام التعداد الذي أجريت فيه العملية التالية : } 214 + 362 = 606$$

التمرين 13 :

$$\text{احسب في نظام التعداد الذي أساسه 5 ما يلي : } \begin{array}{r} 4221 + 3424 \\ 1244 + 4423 \end{array}$$

التمرين 14 :

$$\text{اكتب العدد } (a+1)^4 \text{ في نظام التعداد الذي أساسه } a \text{ حيث } a > 6$$

التمرين 15 :

يكتب العدد a في النظام الذي أساسه 5 كما يلي : $\alpha.33$. و يكتب a في النظام الذي أساسه 3

يكتب العدد a في النظام الذي أساسه 5 كما يلي : $\alpha.33$. و يكتب a في النظام الذي أساسه 3

كما يلي: $2\beta\beta\alpha$. عين a في النظام العشري.

التمرين 16:

احسب: $(x-2)(x^2+x+1)$

في أي نظام تعداد x لدينا: $110 \times 111 = 101010$

التمرين 17:

اكتب العدد 2^{10} في نظام العد الذي أساسه 2.

التمرين 18:

اكتب جدول الجمع في نظام العد الذي أساسه 7.

الحلول

التمرين 1:

1- دراسة بواقى قسمة 2^n على 7:

$$2^0 \equiv 1[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^3 \equiv 1[7]$$

ومنه: $(2^3)^p \equiv (1)^p[7]$ أي: $2^{3p} \equiv 1[7]$

وعليه: $2^{3p+1} \equiv 2[7]$ أي: $2^{3p} \times 2 \equiv 1 \times 2[7]$

ومنه: $2^{3p+2} \equiv 4[7]$ أي: $2^{3p} \times 2^2 \equiv 1 \times 2^2[7]$

لما $n = 3p$: باقي قسمة 2^n على 7 هو 1

لما $n = 3p + 1$: باقي قسمة 2^n على 7 هو 2

لما $n = 3p + 2$: باقي قسمة 2^n على 7 هو 4

الاستنتاج:

- باقي قسمة 2^{2008} على 7:

لدينا: $2008 = 3 \times 669 + 1$ ومنه: $2^{2008} \equiv 2[7]$

- باقي قسمة 1954 (1962) على 7:

لدينا: $1962 \equiv 2[7]$ ومنه $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ لكن: $1954 = 3 \times 665 + 1$

ومنه: $2^{1954} \equiv 2[7]$ وعليه: $(1962)^{1954} \equiv 2[7]$

- باقي قسمة 1004 (1418) على 7:

لدينا: $1418 \equiv 4[7]$ ومنه $1418^{1004} \equiv 4^{1004}[7]$

وعليه: $(1418)^{1004} \equiv (2^2)^{1004}[7]$ أي: $(1418)^{1004} \equiv 2^{2008}[7]$

لكن $2008 = 3 \times 669 + 1$ ومنه $(1418)^{1004} \equiv 2[7]$

(2) اثبات أن A_n يقبل القسمة على 7:

لدينا: $2007 \equiv 5[7]$ ومنه $2007.2^{3n+1} \equiv 5.2^{3n+1}[7]$ لكن $2^{3n+1} \equiv 2[7]$

وعليه: $2007.2^{3n+1} \equiv 10[7]$ أي أن: $2007.2^{3n+1} \equiv 3[7]$ (1)

ولدينا: $1417 \equiv 3[7]$ ومنه: $1417.2^{6n} \equiv 3.2^{6n}[7]$ ولدينا: $2^{6n} = (2^{3n})^2$

ومنه: $2^{6n} \equiv 1[7]$ وبالتالي: $1417.2^{6n} \equiv 3[7]$ (2)

من (1) و (2): $2007.2^{3n+1} + 1417.2^{6n} \equiv 6[7]$ (3)

ولدينا: $1954 \equiv 1[7]$ (4)

من (3) و (4): $2007.2^{3n+1} + 1417.2^{6n} + 1954 \equiv 0[7]$

ومنه: $A_n \equiv 0[7]$ من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 2:

(1) إثبات أن:

$$B_n = n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

عند قسمة أي عدد طبيعي n على 5 فإن البواقى الممكنة هي: 0, 1, 2, 3, 4 وعليه ندرس جميع قيم n في كل حالة:

1- إذا كان $n \equiv 0[5]$ فإن $n^4 \equiv 0[5]$ و $n^4 - 1 \equiv -1[5]$ وعليه

$$n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

2- إذا كان $n \equiv 1[5]$ فإن $n^4 \equiv 1[5]$ و $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

$$n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

3- إذا كان $n \equiv 2[5]$ فإن $n^4 \equiv 1[5]$ و $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

$$n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

4- إذا كان $n \equiv 3[5]$ فإن $n^4 \equiv 1[5]$ و $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

$$n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

5- إذا كان $n \equiv 4[5]$ فإن: $n^4 \equiv 1[5]$ و $n^4 - 1 \equiv 0[5]$

$$n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $B_n \equiv 0[5]$

$$2^{12p+5} \equiv 6[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^5 \equiv 2^5[13]$$

$$2^{12p+6} \equiv 12[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^6 \equiv 2^6[13]$$

$$2^{12p+11} \equiv 11[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^7 \equiv 2^7[13]$$

$$2^{12p+8} \equiv 9[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^8 \equiv 2^8[13]$$

$$2^{12p+9} \equiv 5[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^9 \equiv 2^9[13]$$

$$2^{12p+10} \equiv 10[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^{10} \equiv 2^{10}[13]$$

$$2^{12p+11} \equiv 7[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^{11} \equiv 2^{11}[13]$$

و عليه البواقي هي :

$$\text{لما } n = 12p \quad \text{الباقى هو } 1 \quad \text{لما } n = 12p + 1 \quad \text{الباقى هو } 2$$

$$\text{لما } n = 12p + 2 \quad \text{الباقى هو } 4 \quad \text{لما } n = 12p + 3 \quad \text{الباقى هو } 8$$

$$\text{لما } n = 12p + 4 \quad \text{الباقى هو } 3 \quad \text{لما } n = 12p + 5 \quad \text{الباقى هو } 6$$

$$\text{لما } n = 12p + 6 \quad \text{الباقى هو } 12 \quad \text{لما } n = 12p + 7 \quad \text{الباقى هو } 11$$

$$\text{لما } n = 12p + 8 \quad \text{الباقى هو } 9 \quad \text{لما } n = 12p + 9 \quad \text{الباقى هو } 5$$

$$\text{لما } n = 12p + 10 \quad \text{الباقى هو } 10 \quad \text{لما } n = 12p + 11 \quad \text{الباقى هو } 7$$

بواقي قسمة 10^n على 13 :

$$10^0 \equiv 1[13], 10^1 \equiv 10[13], 10^2 \equiv 9[13]$$

$$10^3 \equiv 12[13], 10^4 \equiv 3[13], 10^5 \equiv 4[13]$$

$$10^6 \equiv 1[13]$$

$$\text{لدينا : } 10^6 \equiv 1[13] \quad \text{ومنه : } 10^{6m} \equiv 1[13] \quad \text{حيث : } m \in \mathbb{N}$$

$$10^{6m+1} \equiv 10[13] \quad \text{ومنه : } 10^{6m} \cdot 10 \equiv 10[13]$$

$$10^{6m+2} \equiv 9[13] \quad \text{ومنه : } 10^{6m} \cdot 10^2 \equiv 10^2[13]$$

$$10^{6m+3} \equiv 12[13] \quad \text{ومنه : } 10^{6m} \cdot 10^3 \equiv 10^3[13]$$

$$10^{6m+4} \equiv 3[13] \quad \text{ومنه : } 10^{6m} \cdot 10^4 \equiv 10^4[13]$$

$$10^{6m+5} \equiv 4[13] \quad \text{ومنه : } 10^{6m} \cdot 10^5 \equiv 10^5[13]$$

$$10^n \equiv 1[13] : n = 6m \quad \text{ومنه لما :}$$

$$10^n \equiv 10[13] : n = 6m+1$$

$$10^n \equiv 9[13] : n = 6m+2$$

التمرين 3 :

$$\text{لدينا : } 100 \equiv 9[13] \quad \text{و} \quad 100^2 \equiv 81[13] \quad \text{أي} \quad (100)^2 \equiv 3[13]$$

$$(100)^3 \equiv 9 \times 3[13] \quad \text{أي} \quad (100)^3 \equiv 1[13]$$

$$\text{و لدينا : } 100^{1000000} = 100^{999999+1}$$

$$= 100^{999999} \cdot 100^1$$

$$= [(100)^3]^{333333} \times 100$$

$$\text{و لدينا : } (100)^3 \equiv 1[13] \quad \text{ومنه : } [(100)^3]^{333333} \equiv 1[13]$$

$$\text{ومنه : } (100)^{999999} \equiv 1[13] \quad \text{و عليه : } 100^{666666} \cdot 100 \equiv 1 \cdot 9[13]$$

$$\text{إذن : } (100)^{1000000} \equiv 9[13]$$

التمرين 4 :

$$(1) \quad \text{لدينا : } 7^n + 1 \equiv 0[8] \quad \text{ومنه : } 7^n \equiv -1[8]$$

$$\text{و لدينا : } 7 \equiv -1[8] \quad \text{ومنه : } 7^n \equiv (-1)^n[8]$$

$$\text{ومنه : } 7^n \equiv -1[8] \quad \text{معناه : } n = 2p + 1 \quad \text{و} \quad p \in \mathbb{N}$$

(2) تعيين a :

$$\text{إذا كان } n = 2k \quad \text{فإن : } (-1)^n \equiv 1[8] \quad \text{ومنه : } 7^n \equiv 1[8]$$

$$\text{و بالتالي : } 7^n + 1 \equiv 2[8] \quad \text{ومنه : } a = 2$$

التمرين 5 :

1- بواقي قسمة 2^n على 13 :

$$2^0 \equiv 1[13], 2^1 \equiv 2[13], 2^2 \equiv 4[13], 2^3 \equiv 8[13]$$

$$2^4 \equiv 3[13], 2^5 \equiv 6[13], 2^6 \equiv 12[13], 2^7 \equiv 11[13]$$

$$2^8 \equiv 9[13], 2^9 \equiv 5[13], 2^{10} \equiv 10[13], 2^{11} \equiv 7[13]$$

$$2^{12} \equiv 1[13]$$

$$\text{لدينا : } 2^{12} \equiv 1[13] \quad \text{ومنه : } 2^{12p} \equiv 1[13] \quad \text{من أجل كل عدد طبيعي } p.$$

$$\text{ومنه : } 2^{12p+1} \equiv 2[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2 \equiv 2[13]$$

$$2^{12p+2} \equiv 4[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^2 \equiv 2^2[13]$$

$$2^{12p+3} \equiv 8[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^3 \equiv 2^3[13]$$

$$2^{12p+4} \equiv 3[13] \quad \text{أي} \quad 2^{12p} \cdot 2^4 \equiv 2^4[13]$$

حيث : $0 \leq \alpha \leq 11$ من أجل $10^{12m} \equiv 1[13] : \alpha = 0$

من أجل $10^{12m+1} \equiv 10[13] : \alpha = 1$

من أجل $10^{12m+2} \equiv 9[13] : \alpha = 2$

من أجل $10^{12m+3} \equiv 12[13] : \alpha = 3$

من أجل $10^{12m+4} \equiv 3[13] : \alpha = 4$

من أجل $10^{12m+5} \equiv 4[13] : \alpha = 5$

من أجل $10^{12m+6} \equiv 1[13] : \alpha = 6$

من أجل $10^{12m+7} \equiv 10[13] : \alpha = 7$

من أجل $10^{12m+8} \equiv 9[13] : \alpha = 8$

من أجل $10^{12m+9} \equiv 12[13] : \alpha = 9$

من أجل $10^{12m+10} \equiv 3[13] : \alpha = 10$

من أجل $10^{12m+11} \equiv 4[13] : \alpha = 11$

لدينا : $10^n \equiv 2^n[13]$ و منه : $10^n - 2^n \equiv 0[13]$

و عليه : $n = 12p$ أو $n = 12p + 4$ أو $n = 12p + 8$ حيث $p \in \mathbb{N}$
التمرين 6 :

تعيين $n^2 - 2n + 27 \equiv 0[n-3] : n$

أي : $n^2 - 3n + n + 27 \equiv 0[n-3]$

$n(n-3) + n + 27 \equiv 0[n-3]$

$n(n-3) + (n-3) + 30 \equiv 0[n-3]$

$(n-3)(n+1) + 30 \equiv 0[n-3]$

لكن : $n-3 \equiv 0[n-3]$ و عليه : $30 \equiv 0[n-3]$

و منه : $n-3$ يقسم 30 و عليه : $n-3 \in \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

و بالتالي قيم n هي : 4, 5, 6, 8, 9, 13, 18, 33

التمرين 7 :

1- إثبات أن $a \equiv r[n]$

لدينا : $a = nq + r$ حيث : $0 \leq r < n$ و عليه : $a - r = nq$

و منه : $a - r \equiv 0[n]$ و بالتالي : $a \equiv r[n]$

$10^n \equiv 12[13] : n = 6m+3$

$10^n \equiv 3[13] : n = 6m+4$

$10^n \equiv 4[13] : n = 6m+5$

2- بوضع : $A_n = 17.(1310)^{6n+3} + 24.(1926)^{12n+7}$

نبين أن $A_n \equiv 0[13]$

لدينا : $17 \equiv 4[13]$ و $1310 \equiv 10[13]$ و عليه : $(1310)^{6n+3} \equiv 10^{6n+3}[13]$

و منه : $(1310)^{6n+3} \equiv 12[13]$ و بالتالي : $17.(1310)^{6n+3} \equiv 4.12[13]$

أي : $17.(1310)^{6n+3} \equiv 9[13]$ و لدينا : $24 \equiv 11[13]$

و $1926 \equiv 2[13]$ و عليه : $(1926)^{12n+7} \equiv 2^{12n+7}[13]$

و منه : $(1926)^{12n+7} \equiv 11[13]$ و بالتالي : $24.(1926)^{12n+7} \equiv (11)^2[13]$

و عليه : $24.(1926)^{12n+7} \equiv 4[13]$ و (2)

من (1) و (2) : $17.(1310)^{6n+3} + 24.(1926)^{12n+7} \equiv 0[13]$

و عليه : $A_n \equiv 0[13]$

(3) نبرهن أن : $(2012)^{1990} + (1835)^{1991} \equiv 10[13]$

لدينا : $2012 \equiv 10[13]$ و منه : $(2012)^{1990} \equiv 10^{1990}[13]$

لكن : $1990 = 6 \times 331 + 4$ و عليه : $(2012)^{1990} \equiv 3[13]$

و لدينا : $1835 \equiv 2[13]$ و منه : $(1835)^{1991} \equiv 2^{1991}[13]$

ولكن : $1991 = 12 \times 165 + 11$ و عليه : $(1835)^{1991} \equiv 7[13]$

إذن : $(2012)^{1990} + (1835)^{1991} \equiv 10[13]$

و بالتالي : $(2012)^{1990} + (1835)^{1991} + 3 \equiv 0[13]$

(4) تعيين n بحيث : $10^n - 2^n \equiv 0[13]$

نقوم بتعميم الدور : $10^{6m} \equiv 1[13]$ و منه : $(10^{6m})^2 \equiv (1)^2[13]$

و عليه : $10^{12m} \equiv 1[13]$ إذن : $10^{12m+\alpha} \equiv 10^\alpha[13]$

(2) تعيين باقي قسمة $2n+1$ على n :

لدينا : $a \equiv n-1[n]$ و عليه : $2a \equiv 2n-2[n]$.

ومنه : $2a+1 \equiv n-1+n[n]$ أي : $2a+1 \equiv 2n-1[n]$

إذن : $2a+1 \equiv n-1[n]$

وعليه باقي قسمة $2a+1$ على n هو $n-1$ و هو نفس باقي قسمة a على n .
- تعيين باقي قسمة 415 على 8 :

لدينا : $415 = 8 \times 5 + 7$ ومنه : $415 \equiv 7[8]$

- استنتاج باقي قسمة 831 على 8 :

لدينا $831 = 2(415) + 1$ ومنه : $831 \equiv 7[8]$

التمرين 8 :

1- ندرس بواقي قسمة 4^n على 9 :

$4^0 \equiv 1[9]$; $4^1 \equiv 4[9]$; $4^2 \equiv 7[9]$; $4^3 \equiv 1[9]$

ومنه بما أن : $4^3 \equiv 1[9]$ فإن : $4^{3k} \equiv 1[9]$, $4^{3k+1} \equiv 4[9]$, $4^{3k+2} \equiv 7[9]$

لما $n \equiv 0[3]$: $4^n \equiv 1[9]$ و لما $n \equiv 1[3]$: $4^n \equiv 4[9]$

و لما $n \equiv 2[3]$: $4^n \equiv 7[9]$

- إثبات أن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

- من أجل : $n \equiv 0[3]$: $3n \equiv 0[9]$

و عليه $4^n - 3n - 1 \equiv 1 - 0 - 1[9]$ إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

- من أجل : $n \equiv 1[3]$: $3n \equiv 3[9]$

و عليه $4^n - 3n - 1 \equiv 4 - 3 - 1[9]$ إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

- من أجل : $n \equiv 2[3]$: $3n \equiv 6[9]$

و عليه $4^n - 3n - 1 \equiv 7 - 6 - 1[9]$ إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$

إذن : $4^n - 3n - 1 \equiv 0[9]$ من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين 9 :

(1) تحديد n بحيث : $n^2 + n + 1 \equiv 0[7]$

ومنه $n^2 + 1, n + 1 \equiv 0[7]$ لكن $8 \equiv 1[7]$ و عليه $n^2 + 8n + 1 \equiv 0[7]$

إذن : $(n+4)^2 - 16 + 1 \equiv 0[7]$ و عليه $(n+4)^2 - 15 \equiv 0[7]$

أي : $(n+4)^2 - 1 \equiv 0[7]$ و عليه : $(n+4-1)(n+4+1) \equiv 0[7]$

ومنه : $(n+3)(n+5) \equiv 0[7]$

و عليه $n+3 \equiv 0[7]$ أو $n+5 \equiv 0[7]$ لأن 7 عدد أولي

أي أن : $n \equiv -3[7]$ أو $n \equiv -5[7]$ إذن : $n \equiv 4[7]$ أو $n \equiv 2[7]$.

(2) بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^0 \equiv 1[7]$, $2^1 \equiv 2[7]$, $2^2 \equiv 4[7]$, $2^3 \equiv 1[7]$

و عليه : $2^{3p} \equiv 1[7]$, $2^{3p+1} \equiv 2[7]$, $2^{3p+2} \equiv 4[7]$

(3) استنتاج قيم s :

$2^{2s} + 2^s + 1 \equiv 0[7]$ بوضع : $2^s = n$ نجد : $n^2 + n + 1 \equiv 0[7]$

ومن السؤال الأول نجد : $n \equiv 4[7]$ أو $n \equiv 2[7]$

وعليه : $2^s \equiv 4[7]$ أو $2^s \equiv 2[7]$

من السؤال الثاني نجد : $s = 3p + 2$ أو $s = 3p + 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 10

كتابة الأعداد في النظام ذي الأساس 8 :

• $100 = 12 \times 8 + 4$

$12 = 1 \times 8 + 4$

$1 = 0 \times 8 + 1$

ومنه 100 يكتب 144 في النظام ذي الأساس 8 .

• $1830 = 228 \times 8 + 6$

$228 = 28 \times 8 + 4$

$28 = 3 \times 8 + 4$

$3 = 0 \times 8 + 3$

ومنه 1830 تكتب 3446 في النظام ذي الأساس 8

• $1962 = 245 \times 8 + 2$

$245 = 30 \times 8 + 5$

$30 = 3 \times 8 + 6$

$3 = 0 \times 8 + 3$

ومنه 1962 يكتب 3652 في النظام ذي الأساس 8

• $2008 = 223 \times 9 + 1$

$223 = 25 \times 9 + 3$

$25 = 2 \times 9 + 7$

$2 = 0 \times 9 + 2$

ومنه 2008 يكتب 2731 في نظام التعداد الذي أساسه 9 .

17- الأعداد الأولية

المضاعف المشترك الأصغر :

العدد الأولي :

تعريف :

نقول عن عدد طبيعي a إنه أولي إذا كان عدد قواسمه اثنين مختلفين .
مبرهنة 1 :

كل عدد طبيعي a غير أولي و أكبر تماماً من 1 يقبل ، على الأقل ، قاسماً أولياً b يحقق :
 $b^2 \leq a$

مبرهنة 2 :

كل عدد طبيعي a غير أولي و أكبر تماماً من 1 يقبل تحليلاً إلى جداء عوامل أولية
و هذا التحليل وحيد .

قواسم عدد طبيعي :

مبرهنة 3 :

يكون العدد b قاسماً للعدد a إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجوداً في تحليل a و بأس
إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل a .

عدد قواسم عدد طبيعي :

مبرهنة 4 :

عدد قواسم العدد a حيث : $a = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times \dots \times a_n^{\alpha_n}$ هو $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n)$
حيث : a_1, a_2, \dots, a_n أعداد أولية ، $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ أعداد طبيعية .
مثال :

ما هو عدد قواسم 120 .

الحل :

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ ومنه عدد قواسمه هو : $(1+3)(1+1)(1+1)$ أي 16 قاسم

تعيين القاسم المشترك الأكبر :

مبرهنة 5 :

القاسم المشترك الأكبر للأعداد a_1, a_2, \dots, a_n هو جداء الأعداد الأولية المشتركة في تحليلاتها
بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة فقط وبأصغر أس .
مضاعفات عدد طبيعي :

مبرهنة 6 :

يكون العدد الطبيعي b مضاعف للعدد a إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجود في تحليل
 a و بأس مساو و إما أكبر من أسه في تحليل a .

تعيين المضاعف المشترك الأصغر :

مبرهنة 7 :

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد a_1, a_2, \dots, a_n هو جداء العوامل الأولية الموجودة في
تحليلاتها بحيث يأخذ كل عامل مرة واحدة و بأكبر أس .

$$\text{إذن : } (x-2)(x^2+x+1)=0$$

و عليه إما : $x-2=0$ أو $x^2+x+1=0$.

$x-2=0$ تكافئ $x=2$

$x^2+x+1=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية $\Delta = -3$ و منه ليس لها حلول .
إذن : $x=2$

التمرين 17 :

$$2^{10} = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 \\ + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^9 + 1 \times 2^{10}$$

و منه 2^{10} يكتب في النظام الثنائي : 1000000000

التمرين 18 :

6	5	4	3	2	1	0	+
6	5	4	3	2	1	0	0
10	6	5	4	3	2	1	1
11	10	6	5	4	3	2	2
12	11	10	6	5	4	3	3
13	12	11	10	6	5	4	4
14	13	12	11	10	6	5	5
15	14	13	12	11	10	6	6

التمارين

تعيين المضاعفات المشتركة لعددتين :

مبرهنة 8 :

المضاعفات المشتركة لعددتين طبيعيتين هي مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر .

العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر :

مبرهنة 9 :

$$PGCD(a, b) \cdot PPCM(a, b) = a \cdot b$$

نتيجة :

إذا كان a, b أوليان فيما بينهما .

$$PPCM(a, b) = a \cdot b$$

خواص المضاعف المشترك الأصغر :

(1) إذا كان λ عدداً صحيحاً غير معدوم فإن :

$$PPCM(\lambda a; \lambda b) = |\lambda| \cdot PPCM(a, b)$$

(2) عند البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد يمكن تعويض عددتين منهما

بمضاعفهما المشترك الأصغر .

مبرهنة 10 (مبرهنة بيزو) :

يكون العددان الطبيعيان غير المعدومين a و b أوليان فيما بينهما إذا ، و فقط ، إذا وجد

$$ax + by = 1$$

عدنان صحيحان x و y بحيث

تطبيقات على مبرهنة بيزو

(1) إذا كان a عدداً أولياً مع العددان b و c فإنه أولياً مع الجداء $b \cdot c$.

(2) إذا كان a أولياً مع كل من الأعداد b_1, b_2, \dots, b_n فإنه أولياً مع

$$b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_n$$

(3) إذا كان a أولياً مع a فإن a أولياً مع b^n

مبرهنة 11 (غوص) :

a و b عدنان طبيعيان غير معدومين ، C عدد صحيح .

إذا قسم العدد a الجداء $b \cdot C$ وكان أولياً مع b فإن a يقسم C .

تطبيقات على مبرهنة غوص :

1- إذا قبل العدد b القسمة على كل من العددين a_1, a_2 وكان a_2, a_1 أوليان فيما بينهما فإن :

$$b \text{ يقبل القسمة على } a_1 \times a_2$$

2- إذا قبل العدد b القسمة على كل من الأعداد a_1, a_2, \dots, a_n الأولية فيما بينها مثلي مثلي،

$$\text{فإنه يقبل القسمة على الجداء : } a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

التمرين 1 :

(1) هل العدد 503 أولي أم لا ؟

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{N} \text{ المعادلة : } x^2 - y^2 = 503$$

التمرين 2 :

(1) حلل العدد 60 إلى جداء عوامل أولية .

(2) ما هو عدد قواسم العدد 60 .

(3) عين قواسم العدد 60 .

التمرين 3 :

نعتبر العددان A و B حيث : $A = 44 \times 88 \times 96$ و $B = 35 \times 56 \times 78$

(1) حلل A و B إلى جداء عوامل أولية .

$$(2) \text{ أحسب : } PGCD(A, B)$$

$$(3) \text{ أحسب : } PPCM(A, B)$$

التمرين 4 :

دون تحليل إلى جداء عوامل أولية أحسب : $PGCD(30000; 170000)$ و

$$PPCM(30000; 170000)$$

التمرين 5 :

أوجد أصغر عدد طبيعي له عشرة قواسم .

التمرين 6 :

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{Z} \text{ المعادلة } 9x - 22y = 55$$

$$(2) \text{ عين الحلول } (x, y) \text{ للمعادلة (1) بحيث } PGCD(x, y) = 55$$

التمرين 7 :

a, b, c, d أربعة حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q بحيث :

$$10a^2 = d - b \text{ و } q > 1 \text{ و } q \text{ أولي مع } a . \text{ عين هذه الحدود علماً أن : } 10a^2 = d - b$$

التمرين 8 :

(1) أوجد كل الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1980 .

$$(2) \text{ عين الأعداد الطبيعية } a, b \text{ حيث } 1980 = 58^2 - \mu^2 \text{ بحيث}$$

$$PPCM(a, b) = \mu, PGCD(a, b) = \delta$$

التمرين 9 :

a و b عدنان طبيعيان حيث $a \leq b$ ، قاسمهما المشترك الأكبر ، μ مضاعفهما المشترك

$$\text{الأصغر . عين كل الأعداد } a, b \text{ حيث : } 11\delta + 7\mu = 1989$$

التمرين 10 :

$$(1) \text{ عين : } PGCD(2490; 32785; 2905)$$

(2) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $7x + 6y = 79$ لاحظ ان : $79 = 7 + 72$

(3) اشترى نادي كرة اليد ملابس رياضية للاعبين ، علما ان ثمن بذلة اللاعب هو 2490 DA و ثمن بذلة اللاعب 32785 DA و علما ان النادي دفع في المجموع 32785 DA ما هو عدد اللاعبين و عدد الالعاب
التمرين 11 :

(1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $5x - 3y = 7$...

نفرض $(x; y)$ حل للمعادلة (1) ما هي القيم الممكنة لـ : $PGCD(x; y)$

(2) ما هي الحلول $(x; y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون $PGCD(x; y)$ أكبر ما يمكن
التمرين 12 :

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $44x - 35y = 7$ (1)

(1) بين انه إذا كانت $(x; y)$ حل للمعادلة (1) فان : $x \equiv 0 [7]$

(2) عين حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) .

(3) إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة (1) ما هي القيم الممكنة لـ : $PGCD(x; y)$

(4) عين الحلول $(x; y)$ للمعادلة (1) بحيث : $PGCD(x; y) = 7$

(5) عين الحلول $(x; y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون : x و y اوليان فيما بينهما .

(6) عين الحلول $(x; y)$ للمعادلة (1) بحيث : $x^2 + y^2 < 2009$

الحلول

التمرين 1 :

(1) البحث عن أولية : $a = 503$

مقارنة a و b^2	b^2	قابلية القسمة	القاسم الأولي b
$b^2 < a$	4	b لا يقسم a	2
$b^2 < a$	9	b لا يقسم a	3
$b^2 < a$	25	b لا يقسم a	5
$b^2 < a$	49	b لا يقسم a	7
$b^2 < a$	121	b لا يقسم a	11
$b^2 < a$	169	b لا يقسم a	13
$b^2 < a$	289	b لا يقسم a	17
$b^2 < a$	361	b لا يقسم a	19
$b^2 < a$	529	b لا يقسم a	23

و منه لا يوجد عدد أولي b يقسم a بحيث $b^2 \leq a$ و عليه a عدد أولي .

(2) حل في \mathbb{N} المعادلة : $x^2 - y^2 = 503$

لدينا : 503 عدد أولي و لدينا : $(x - y)(x + y) = 503$ و بما ان $x - y < x + y$

فان $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 503 \end{cases}$ و بالجمع نجد : $2x = 504$ و بالتالي : $x = 252$

إن (252; 251) حل للمعادلة .

التمرين 2 :

(1) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

(2) عدد قواسم 60 : $(1 + 2)(1 + 1)(1 + 1) = 12$ و منه عدد قواسم 60 هو 12 .

(3) تعيين قواسم 60 :

كل قاسم للعدد 60 يكون من الشكل : $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\delta$

حيث $0 \leq \alpha \leq 2$ و $0 \leq \beta \leq 1$ و $0 \leq \delta \leq 1$

قيم α	قيم β	قيم δ	القاسم $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\delta$
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	$\delta = 0$	1
		$\delta = 1$	5
	$\beta = 1$	$\delta = 0$	3
		$\delta = 1$	15
$\alpha = 1$	$\beta = 0$	$\delta = 0$	2
		$\delta = 1$	10
	$\beta = 1$	$\delta = 0$	6
		$\delta = 1$	30
$\alpha = 2$	$\beta = 0$	$\delta = 0$	4
		$\delta = 1$	20
	$\beta = 1$	$\delta = 0$	12
		$\delta = 1$	60

و عليه قواسم 60 هي : 1، 2، 3، 4، 5، 6، 10، 12، 15، 20، 30، 60 .

التمرين 3 :

(أ) التحليل :

$$A = 44 \times 88 \times 96 = 4 \times 11 \times 8 \times 11 \times 24 \times 4$$

$$A = 2^2 \times 11 \times 2^3 \times 11 \times 2^3 \times 3 \times 2^2$$

$$A = 2^{10} \times 3 \times 11^2$$

$$B = 35 \times 56 \times 78 = 5 \times 7 \times 8 \times 7 \times 39 \times 2$$

$$B = 5 \times 7 \times 2^3 \times 7 \times 3 \times 13 \times 2$$

$$B = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13$$

$$PPCM(A; B): \text{حساب (2)}$$

$$PPCM(A; B) = 2^4 \times 3 = 48$$

$$PGCD(A; B): \text{حساب (3)}$$

$$PGCD(A; B) = 2^{10} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 11^2 \times 13 = 1183902720$$

$$\text{التمرين 4:} \dots\dots\dots PGCD(30000; 170000) = PGCD(3 \cdot 10^4; 17 \cdot 10^4)$$

$$= 10^4 PGCD(3; 17)$$

$$= 10^4 \times 1 = 10^4$$

$$PPCM(30000; 170000) = PPCM(3 \cdot 10^4; 17 \cdot 10^4)$$

$$= 10^4 PPCM(3; 17)$$

$$= 10^4 \times 3 \times 17$$

$$= 510000$$

$$\text{التمرين 5:} \dots\dots\dots$$

ايجاد اصغر عدد طبيعي b له 10 قواسم :

يكون b اصغر ما يمكن إذا كان له اصغر عدد ممكن من العوامل الأولية و كان مجموع قواسمه 10. اي b إما له عامل واحد أولي أو عاملان .

$$\text{ومنه : } b = a^\alpha \text{ أو } b = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2}$$

$$\text{إذا كان } b = a^\alpha \text{ فإن } 1 + \alpha = 10 \text{ أي } \alpha = 9$$

$$\text{و إذا كان : } b = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \text{ فإن : } (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) = 10$$

$$\text{و عليه : } \begin{cases} 1 + \alpha_1 = 2 \\ 1 + \alpha_2 = 10 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 1 + \alpha_1 = 5 \\ 1 + \alpha_2 = 2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 1 + \alpha_1 = 1 \\ 1 + \alpha_2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{أي : } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 9 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{و عليه } b = a_2^9 \text{ أو } b = a_1 \times a_2^4 \text{ أو } b = a_1^4 \times a_2$$

إذن يكون b اصغر ما يمكن إذا كانت العوامل الأولية في التحليل اصغر ما يمكن أي :

$$b = 2^4 \times 3 \text{ أو } b = 2 \times 3^4 \text{ أو } b = 2^9$$

$$\text{و عليه : } b = 48 \text{ أو } b = 162 \text{ أو } b = 512$$

إذن اصغر عدد هو 48 و عدد قواسمه 10.

$$(1) \text{ حل المعادلة : } 9x - 22y = 55$$

$$\text{لدينا } 9x = 22y + 55 \text{ و عليه : } 9x = 11(2y + 5)$$

لدينا 11 يقسم $9x$ و 11 أولي مع 9

و عليه 11 يقسم x حسب نظرية غوص و منه : $x = 11x'$

$$\text{بالتعويض في (1) نجد : } 9 \times 11x' - 11 \cdot 2y = 5 \times 11$$

$$\text{و بالتالي : } 9x' - 2y = 5 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{نلاحظ أن (1; 2) حل للمعادلة (2) و عليه } 9 \times 1 - 2 \times 2 = 5$$

$$\text{و منه : } 9x' - 2y = 9 \times 1 - 2 \times 2 \text{ أي : } 9(x' - 1) = 2(y - 2) \dots\dots (3)$$

لدينا : 2 نقسم $9(x' - 1)$ و 2 أولي مع 9 . ومنه حسب نظرية غوص : 2 يقسم $x' - 1$

$$\text{إذن : } x' - 1 = 2k \text{ و عليه : } x' = 2k + 1 \text{ و منه : } x = 11(2k + 1)$$

$$\text{بالتعويض في (3) نجد : } 9 \times 2k = 2(y - 2) \text{ إذن } y - 2 = 9k$$

$$\text{و منه : } y = 9k + 2$$

و عليه حلول المعادلة (1) هي كل الثنائيات $(22k + 11, 9k + 2)$ مع k يسمح % .

$$2 - \text{تعيين حلول (1) بحيث : } PGCD(x; y) = 55$$

إذن : $x = 55x'$ و $y = 55y'$ مع x' و y' أوليا فيما بينهما

$$\text{بالتعويض في (1) نجد : } 9 \times 55x' - 22 \cdot 55y' = 55$$

$$\text{و عليه : } 9x' - 22y' = 1 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{حيث } x' \text{ و } y' \text{ أوليان فيما بينهما . نلاحظ أن الثانية (5; 2) حل للمعادلة (4)}$$

$$\text{و منه : } 9x' - 22y' = 9 \times 5 - 22 \times 2$$

$$\text{و عليه : } 9(x' - 5) = 22(y' - 2) \dots\dots\dots (5)$$

لدينا 9 يقسم $22(y' - 2)$ و 9 أولي مع 22 ومنه 9 يقسم $y' - 2$ أي $y' - 2 = 9\alpha$

$$\text{أي : } y' = 9\alpha + 2 \text{ و بالتعويض في (5) نجد : } 9(x' - 5) = 22 \cdot 9\alpha$$

$$\text{و منه : } x' - 5 = 22\alpha \text{ و بالتالي } x' = 22\alpha + 5$$

$$\text{إذن : } x = 55(22\alpha + 5) \text{ و } y = 55(9\alpha + 2) \text{ و عليه الحلول هي الثانية}$$

$$(x_1; y_1) \text{ حيث : } x_1 = 1210\alpha + 275 \text{ و } y_1 = 495\alpha + 110 \text{ مع } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\text{التمرين 7:} \dots\dots\dots$$

$$10a^2 = d - b \quad \text{تعيين } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d$$

و عليه : $a = 3$ و $b = 45$ او $a = 9$ و $b = 15$ او $a = 45$ و $b = 3$

التمرين 9 : -----

معين a و b :

لدينا : $a = \delta a'$ و $b = \delta b'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما . ولدينا : $\delta \cdot \mu = a \cdot b$

ومنه : $\mu = \delta a' b'$ وبما أن : $11\delta + 7\mu = 1989$

فإن : $11\delta + 7\delta a' b' = 1989$ إذن : $\delta(11 + 7a' b') = 1989$ (1)

و عليه $\delta/1989$ لكن : $1989 = 3^2 \times 13 \times 17$. وعليه δ من قواسم 1989 .
قواسم 1989 هي : 1 ، 3 ، 9 ، 13 ، 17 ، 39 ، 51 ، 117 ، 153 ، 221 ، 663 ، 1989 .

بالتعويض في (1) :

(1) $\delta = 1$: $11 + 7a' b' = 1989$ ومنه $a' b' = \frac{1978}{7}$ مرفوض .

(2) $\delta = 3$: $11 + 7a' b' = 1989$ ومنه $a' b' = \frac{652}{7}$ مرفوض .

(3) $\delta = 9$: $11 + 7a' b' = 221$ ومنه $a' b' = 30$

لما $a' = 1$ و $b' = 30$: $a = 9$ و $b = 270$

لما $a' = 2$ و $b' = 15$: $a = 18$ و $b = 135$

لما $a' = 3$ و $b' = 10$: $a = 27$ و $b = 90$

لما $a' = 5$ و $b' = 6$: $a = 45$ و $b = 54$

(4) $\delta = 13$: $11 + 7a' b' = 153$ ومنه $a' b' = \frac{142}{7}$ مرفوض .

(5) $\delta = 17$: $11 + 7a' b' = 117$ ومنه $a' b' = \frac{106}{7}$ مرفوض .

(6) $\delta = 39$: $11 + 7a' b' = 51$ ومنه $a' b' = \frac{40}{7}$ مرفوض .

(7) $\delta = 51$: $11 + 7a' b' = 39$ ومنه $a' b' = 4$ ومنه

$a' = 1$ و $b' = 4$ عليه $a = 51$ و $b = 204$

(8) $\delta = 117$: $11 + 7a' b' = 17$ ومنه $a' b' = \frac{6}{7}$ مرفوض .

(9) $\delta = 153$: $11 + 7a' b' = 13$ ومنه $a' b' = \frac{2}{7}$ مرفوض .

(10) $\delta = 221$: $11 + 7a' b' = 9$ ومنه $a' b' = -\frac{2}{7}$ مرفوض .

(11) $\delta = 663$: $11 + 7a' b' = 3$ مرفوض .

لدينا : $b = aq$ ، $c = aq^2$ ، $d = aq^3$ و عليه : $10a^2 = aq^3 - aq$

إذن : $10a^2 = qa(q^2 - 1)$ ومنه : $10a = q(q^2 - 1)$

لدينا q أولي مع a و q يقسم $10a$. وبالتالي q يقسم 10 .

إذن القيم الممكنة للعدد q هي : 2 ، 5 ، 10 لأن $(q > 1)$

- من أجل $q = 2$: $10a = 2(2^2 - 1)$ ومنه : $5a = 3$ مرفوض

- من أجل $q = 5$: $10a = 5(5^2 - 1)$ ومنه : $2a = 24$

إذن $a = 12$ و عليه : $b = 60$ ، $c = 300$ ، $d = 1500$

- من أجل $q = 10$: $10a = 10(10^2 - 1)$ ومنه $a = 99$

إذن $b = 990$ ، $c = 9900$ ، $d = 99000$

التمرين 8 : -----

(1) إيجاد الأعداد التي مربع كل منها يقسم 1980

$$1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

إذن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1980 هي : 1 ، 2 ، 3 ، 6 .

(2) تعيين الأعداد a و b :

لدينا : $a = \delta a'$ و $b = \delta b'$ حيث a' و b' أوليان فيما بينهما . ولدينا : $\delta \cdot \mu = a \cdot b$

ومنه : $\delta b' = \delta a' \cdot \mu$ أي : $\mu = \delta a' b'$ وبالتعويض في العلاقة $\mu^2 - 5\delta^2 = 1980$

نجد : $(\delta a' b')^2 - 5\delta^2 = 1980$ ومنه : $\delta^2(a'^2 b'^2 - 5) = 1980$ (1)

وبالتالي : δ^2 يقسم 1980 . إذن القيم الممكنة للعدد δ هي : 1 ، 2 ، 3 ، 6 .

1. من أجل $\delta = 1$: تكافئ : $a'^2 b'^2 - 5 = 1980$

إذن : $a'^2 b'^2 = 1985$ ومنه : $a' b' = \sqrt{1985}$ (مرفوض) .

2. من أجل $\delta = 2$: تكافئ : $a'^2 b'^2 - 5 = 495$

إذن : $a'^2 b'^2 = 500$ ومنه : $a' b' = \sqrt{500}$ (مرفوض) .

3. من أجل $\delta = 3$: تكافئ : $a'^2 b'^2 - 5 = 220$

إذن : $a'^2 b'^2 = 225$ و عليه : $a' b' = 15$

و عليه : $a' b' = 15$ أوليان فيما بينهما .

• $a' = 1$ و $b' = 15$: $a = 3$ و $b = 45$

• $a' = 3$ و $b' = 5$: $a = 9$ و $b = 15$

• $a' = 15$ و $b' = 1$: $a = 45$ و $b = 3$

• من أجل $\delta = 6$: تكافئ : $a'^2 b'^2 - 5 = 330$

إذن : $a' b' = \sqrt{335}$ (مرفوض) .

(12) $8 = 1989 : 11 + 7a'b' = 1$ مرفوض .

التمرين 10 :

(1) حساب $PGCD(2490; 32785; 2905)$

لدينا : $2490 = 2 \times 3 \times 5 \times 83$
 $32785 = 5 \times 83 \times 79$
 $2905 = 5 \times 7 \times 83$

ومنه : $PGCD(2490; 32785; 2905) = 5 \times 83 = 415$
 حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة :

$7x + 6y = 79$ لدينا : $79 = 7 + 72$ ومنه : $7 \times 1 + 6(12) = 79$
 إذن : $(1; 12)$ حل خاص للمعادلة (1). ومنه : $7x + 6y = 7(1) + 6(12)$
 وعليه : $7(x-1) = 6(-y+12) \dots\dots\dots (2)$

6 يقسم $7(x-1)$ و 6 أولي مع 7 ومنه 6 يقسم $x-1$
 إذن $x-1 = 6k$ ومنه $x = 6k + 1$ و $k \in \mathbb{Z}$
 بالتعويض في (2) نجد : $7 \times 6k = 6(-y+12)$ ومنه : $-y + 12 = 7k$
 وعليه $y = -7k + 12$

مجموعة الحلول هي كل الثنائيات من الشكل : $(6k + 1; -7k + 12)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
 (2) إيجاد عدد اللاعبين و عدد الالعبات :

نفرض x هو عدد اللاعبين و y عدد الالعبات فيكون :

$2905x + 2490y = 32785$ بالقسمة على 415 نجد :

$7x + 6y = 79$ ومنه $x = 6k + 1$ و $y = -7k + 12$
 حيث : $x > 0$ و $y > 0$ أي $k > -\frac{1}{6}$ و $k < \frac{12}{7}$ إذن : $k = 0$ أو $k = 1$.

ومنه قيم $(x; y)$ هي : $(1; 12)$ أو $(7; 5)$

التمرين 11 :

(1) حل معادلة : $5x - 3y = 7$ (1)

لدينا : $(2; 1)$ حل خاص ومنه : $5x - 3y = 5(2) - 3(1)$
 وعليه : $5(x-2) = 3(y-1) \dots\dots\dots (2)$

لدينا 5 يقسم $3(y-1)$ و 5 أولي مع 3 ومنه 5 يقسم $y-1$

إذن $y-1 = 5k$ وعليه : $y = 5k + 1$ و $k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في (2) نجد :

$5(x-2) = 3.5k$ إذن : $x-2 = 3k$ وعليه : $x = 3k + 2$

الم حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$

حيث : $x = 3k + 2$ و $y = 5k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ممن القيم الممكنة : $PGCD(x; y)$

الم قاسم للعدد x و y هو قاسم للعدد $5x - 3y$ ومنه فهو قاسم للعدد 7 و عليه القيم الممكنة : $PGCD(x; y)$ هي 1 و 7 .

(2) تعيين x, y بحيث يكون $PGCD(x; y)$ أكبر ما يمكن

أي : $PGCD(x; y) = 7$

و عليه : $\begin{cases} x = 7x' \\ y = 7y' \end{cases}$ بحيث x' و y' أوليان فيما بينهما .

بالتعويض في (1) نجد : $5.7x' - 3.7y' = 7$ ومنه : $7(5x' - 3y') = 7$

و عليه : $5x' - 3y' = 1$ نلاحظ أن : $(2; 3)$ حل خاص ومنه :

$5x' - 3y' = 5(2) - 3(3)$ و عليه : $5(x'-2) = 3(y'-3) \dots\dots\dots (3)$

5 يقسم $3(y'-3)$ و 5 أولي مع 3 ومنه 5 يقسم $y'-3$ و عليه : $y'-3 = 5\alpha$

أي : $y' = 5\alpha + 3$ بالتعويض في (3) نجد : $5(x'-2) = 3.5\alpha$

و عليه : $x'-2 = 3\alpha$ ومنه : $x' = 3\alpha + 2$

إذن : $x = 7(3\alpha + 2)$ و $y = 7(5\alpha + 3)$

أي : $x = 21\alpha + 14$ و $y = 35\alpha + 21$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$

التمرين 12 :

(1) تبين أن $\alpha \equiv 0[7]$:

لدينا : $44x - 35y = 7$ ومنه : $44x = 35y + 7$ وعليه : $44x = 7(5y + 1)$

7 يقسم $44x$ و 7 أولي مع 44 ومنه 7 يقسم x . إذن : $x \equiv 0[7]$

(2) تعيين الحل الخاص $(x_0; y_0)$:

لدينا : $44x_0 - 35y_0 = 7$ ولدينا : $x_0 \equiv 0[7]$ و عليه : $x_0 = 7\alpha$

ومنه : $44.7\alpha - 35y_0 = 7$ إذن : $44\alpha - 5y_0 = 1$ و عليه : $y_0 = \frac{1}{5}(44\alpha - 1)$

من أجل $\alpha = 0$: $y_0 = -\frac{1}{5}$ مرفوض .

- من أجل $\alpha = 1$: $y_0 = \frac{43}{5}$ مرفوض .

- من أجل $\alpha = 2$: $y_0 = \frac{87}{5}$ مرفوض .

- من أجل $\alpha = 3$: $y_0 = \frac{131}{5}$ مرفوض .

- من أجل $\alpha = 4$: $y_0 = 35$: إذن : $(x_0; y_0) = (28; 35)$

حل المعادلة (1) : لدينا : $44x - 35y = 44 \times 28 - 35 \times 35$

و عليه : $44(x - 28) = 35(y - 35) \dots\dots (2)$

لدينا 35 يقسم $44(x - 28)$ و 35 أولى مع 44 ومنه 35 يقسم $x - 28$

إذن : $x - 28 = 35\alpha$ أي $x = 35\alpha + 28$ حيث $\alpha \in \mathbb{Z}$

بالتعويض في (2) نجد : $44(35\alpha) = 35(y - 35)$ و منه :

$y - 35 = 44\alpha$ و عليه : $y = 44\alpha + 35$

حلل المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث $x = 35\alpha + 28$ و $y = 44\alpha + 35$

(3) تعيين القيم الممكنة لـ : $PGCD(x; y)$

كل قاسم للعدين x و y هو قاسم للعدد : $44x - 35y$

و منه هو قاسم للعدد 7 . لكن قواسم 7 هي : 1 و 7 .

و عليه القيم الممكنة لـ $PGCD$ هي 1 و 7 .

(4) تعيين $(x; y)$ بحيث : $PGCD(x; y) = 7$

$PGCD(x; y) = 7$ معناه : $x = 7x'$ و $y = 7y'$ و أوليان فيما بينهما .

بالتعويض في (1) نجد : $44x' - 35y' = 1 \dots\dots (3)$

نبحث عن حل خاص :

لدينا : $(28; 35)$ حل خاص للمعادلة (1) و منه : $(4; 5)$ حل خاص للمعادلة (3)

و عليه : $44x' - 35y' = 44(4) - 35(5)$

إذن : $44(x' - 4) = 35(y' - 5) \dots\dots (4)$

44 يقسم $35(y' - 5)$ و 44 أولى مع 35 ومنه 44 يقسم $y' - 5$ أي $y' - 5 = 44\alpha$

إذن : $y' = 44\alpha + 5$ بالتعويض في (4) نجد : $44(x' - 4) = 35.44\alpha$

و منه : $x' - 4 = 35\alpha$ و منه : $x' = 35\alpha + 4$ ، $\alpha \in \mathbb{Z}$

و منه : $x = 7(35\alpha + 4)$ و $y = 7(44\alpha + 5)$

إذن : $x = 245\alpha + 28$ و $y = 308\alpha + 35$

(5) تعيين الحلول $(x; y)$ بحيث :

x و y أوليان فيما بينهما أي $PGCD(x; y) = 1$ مما سبق لدينا : $x \equiv 0[7]$ أي x

مضاعف 7 و عليه حتى يكون $PGCD(x; y) = 1$ يجب أن يكون y ليس مضاعفا للعدد 7 .

إذا كان $y \equiv 0[7]$ فإن مما سبق $308\alpha + 35 \equiv 0[7]$

و عليه : $3\alpha \equiv 0[7]$ و منه $5 \times 3\alpha \equiv 0[7]$ أي $\alpha \equiv 0[7]$

أي $\alpha = 7\beta$. حيث $\beta \in \mathbb{Z}$

أما إذا كان y ليس مضاعفا للعدد 7 فإن : $\alpha \neq 7\beta$

أي $y = 308\alpha + 35$ مع α ليس مضاعفا للعدد 7 .

(6) تعيين $(x; y)$ حلول (1) بحيث : $x^2 + y^2 < 2009$

أي : $(35\alpha + 28)^2 + (44\alpha + 35)^2 < 2009$

$1225\alpha^2 + 1960\alpha + 784 + 1936\alpha^2 + 3080\alpha + 1225 < 2009$

$3161\alpha^2 + 5040\alpha + 2009 < 2009$ إذن : $\alpha(3161\alpha + 5040) < 0$

و عليه : $\alpha \in]-\frac{5040}{3161}; 0[$ أي $\alpha \in]-1,6; 0[$

أي أن : $\alpha = -1$ و منه : $(x; y) = (-7; -11)$

I - الأسطوانة القائمة :

1- تعريف :

نسمي اسطوانة قائمة مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد بعدا ثابتا α عن مستقيم ثابت (Δ) .
 α يسمى نصف قطر الأسطوانة . (Δ) يسمى محور الأسطوانة .

وهي ايضا مجموعة نقاط المستقيمت التي توازي (Δ) وتستند على دائرة (C) نصف قطرها α

2- معادلة أسطوانة محورها $(o; \bar{k})$:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

(γ) أسطوانة محورها $(o; \bar{k})$ و نصف قطرها α .

تكون نقطة $M(x; y; z)$ من الفضاء من (γ) إذا وفقط إذا كان مسقطها العمودي

$M'(x; y; o)$ على $(o; \bar{i}, \bar{j})$ ومنه $OM'^2 = OM^2 = \alpha^2$ وعليه

$x^2 + y^2 = \alpha^2$ هي معادلة الأسطوانة التي محورها $(o; \bar{k})$ و نصف قطرها α .

3- معادلة أسطوانة محورها $(o; \bar{j})$ و نصف قطرها α $x^2 + z^2 = \alpha^2$

4- معادلة أسطوانة محورها $(o; \bar{i})$ و نصف قطرها α $y^2 + z^2 = \alpha^2$

5- مقاطع أسطوانية :

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(o; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ نعتبر الاسطوانة (γ)

ذات المعادلة $x^2 + y^2 = \alpha^2$. (P) مستوي يوازي أحد المستويات الإحداثية .

(أ) إذا كانت معادلة (P) هي $z = k$ فإن : $(P) \cap (\gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha^2 \\ z = k \end{cases}$

وعليه $(P) \cap (\gamma)$ هو دائرة .

(ب) إذا كانت معادلة (P) هي $y = k$ فإن : $(P) \cap (\gamma) : \begin{cases} x^2 = \alpha^2 - k^2 \\ y = k \end{cases}$

* إذا كان $k^2 > \alpha^2$ فإن $(P) \cap (\gamma)$ خالية .

* إذا كان $k^2 = \alpha^2$ فإن $(P) \cap (\gamma)$ هي مستقيم .

* إذا كان $k^2 < \alpha^2$ فإن $(P) \cap (\gamma)$ هي اتحاد مستقيمين .

(ج) إذا كانت معادلة (P) هي $x = k$ فإن : $(P) \cap (\gamma) : \begin{cases} y^2 = \alpha^2 - k^2 \\ x = k \end{cases}$

* إذا كان $k^2 > \alpha^2$ فإن : $(P) \cap (\gamma) = \emptyset$.

* إذا كان $k^2 = \alpha^2$ فإن $(P) \cap (\gamma)$ هي مستقيم .

* إذا كان $k^2 < \alpha^2$ فإن $(P) \cap (\gamma)$ هي اتحاد مستقيمين .

II - المخروط الدوراني :

1- تعريف :

(Δ) مستقيم ثابت . ω نقطة ثابتة على (Δ) . (D) مستقيم متغير يشمل ω و يصنع زاوية

ثابتة θ مع (Δ) . مجموعة المستقيمت (D) تسمى مخروطا دورانيا رأسه ω محوره

(Δ) و نصف زاوية رأسه θ حيث θ زاوية حادة .

2- معادلة مخروط الدوران الذي رأسه O و محوره $(o; \bar{k})$:

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة المخروط وليكن $P(o; o; z)$ مسقطها العمودي على

$(o; \bar{k})$. لدينا $\overline{OM}(x; y; z)$ ، $\overline{OM}(0; 0; 1)$ ، $\bar{k}(0; 0; 1)$ ، $\overline{OM} \cdot \bar{k} = z \dots (1)$ ومن جهة أخرى :

$$\overline{OM} \cdot \bar{k} = \|\overline{OM}\| \cdot \|\bar{k}\| \cdot \cos \theta$$

$$\overline{OM} \cdot \bar{k} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times 1 \times \cos \theta \dots (2)$$

ومنه من 1 و 2 : $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \cos \theta = z$ إذن :

$$(x^2 + y^2 + z^2) \times \cos^2 \theta = z^2$$

ومنه : $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{z^2}{\cos^2 \theta}$: $x^2 + y^2 + z^2 = z^2 (1 + \tan^2 \theta)$

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \theta = 0$$

وهي معادلة المخروط الدوراني الذي رأسه O و نصف زاوية رأسه θ و محوره $(o; \bar{k})$.

3- معادلة مخروط الدوراني الذي رأسه O و نصف زاوية رأسه θ و محوره $(o; \bar{j})$:

$$x^2 + z^2 - y^2 \tan^2 \theta = 0$$

4- معادلة مخروط الدوران الذي رأسه O و نصف زاوية رأسه θ و محوره $(o; \bar{i})$:

$$y^2 + z^2 - x^2 \tan^2 \theta = 0$$

5- مقاطع مخروطية :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المخروط الدوراني (R) الذي معادلته $x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$ حيث $a^2 = \tan^2 \theta$ والمستوي (P) الموازي لأحد المحاور الإحداثية .

$$(P) \cap (R) : \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 k^2 \\ z = k \end{cases} \quad \text{إذا كانت معادلة (P) هي } z = k \text{ فإن}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(P) \cap (R)$ هي النقطة O .

* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(P) \cap (R)$ هي دائرة .

$$(P) \cap (R) : \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0 \\ y = k \end{cases} \quad \text{ب) إذا كانت معادلة (P) هي } y = k \text{ فإن}$$

$$\begin{cases} x^2 - a^2 z^2 = -k \\ y = k \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(P) \cap (R)$ هي اتحاد مستقيمين .

* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(P) \cap (R)$ هي قطع زائد .

$$(P) \cap (R) : \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0 \\ x = k \end{cases} \quad \text{ج) إذا كانت معادلة (P) هي } x = k \text{ فإن}$$

$$\begin{cases} y^2 - a^2 z^2 = -k^2 \\ x = k \end{cases} \quad \text{ومنه :}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(P) \cap (R)$ هي اتحاد مستقيمين .

* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(P) \cap (R)$ هي قطع زائد .

III - المجسم المكافئ :

1- تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المعادلة

$z = x^2 + y^2$ هي لمجسم مكافئ .



2- مقاطع مجسم مكافئ :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس نعتبر المجسم المكافئ (L) ذو المعادلة $z = x^2 + y^2$ ونعتبر المستوي (P) الموازي لأحد المستويات الإحداثية .
لنبحث عن $(L) \cap (P)$.

$$(L) \cap (P) : \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases} \quad \text{أ) إذا كان : } z = k \text{ فإن (P) :}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k \\ z = k \end{cases} \quad \text{وعليه :}$$

* إذا كان $k < 0$ فإن $(L) \cap (P) = \emptyset$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(L) \cap (P) = \{0\}$

* إذا كان $k > 0$ فإن $(L) \cap (P)$ دائرة .

$$(L) \cap (P) : \begin{cases} z = x^2 + k^2 \\ y = k \end{cases} \quad \text{ب) إذا كان : } y = k \text{ فإن (P) :}$$

وعليه $(L) \cap (P)$ هي قطع مكافئ .

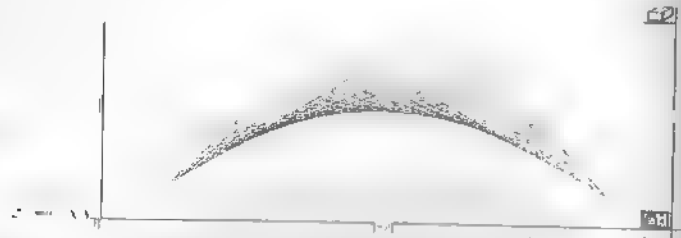
$$(L) \cap (P) : \begin{cases} z = k^2 + y^2 \\ x = k \end{cases} \quad \text{ج) إذا كان : } x = k \text{ فإن (P) :}$$

وعليه $(L) \cap (P)$ هي قطع مكافئ .

IV - المجسم الزائدي :

1- تعريف :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المعادلة $z = x^2 + y^2$ هي لمجسم زائدي .



2- مقاطع مجسم زائدي :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المجسم الزائدي

(II) الذي معادلته $z = x^2 + y^2$ ونعتبر المستوي (P) الموازي لأحد المستويات الإحداثية .

لنبحث عن $(H) \cap (P)$.

(أ) إذا كان $(P): z = k$ فإن $(H) \cap (P): \begin{cases} z = x \cdot y \\ z = k \end{cases}$ ومنه:

$$\begin{cases} x \cdot y = k \\ z = k \end{cases}$$

* إذا كان $k = 0$ فإن $(H) \cap (P)$ هو اتحاد مستقيمين.

* إذا كان $k \neq 0$ فإن $(H) \cap (P)$ هو قطع زائد.

(ب) إذا كان $(P): y = k$ فإن $(H) \cap (P): \begin{cases} x \cdot y = k \\ y = k \end{cases}$

وعليه $(H) \cap (P): \begin{cases} z = kx \\ y = k \end{cases}$ ومنه $(H) \cap (P)$ هي مستقيم.

(ج) إذا كان $(P): x = k$ فإن $(H) \cap (P): \begin{cases} x \cdot y = z \\ x = k \end{cases}$

وعليه $(H) \cap (P): \begin{cases} z = ky \\ x = k \end{cases}$ ومنه $(H) \cap (P)$ هي مستقيم.

التمارين

التمرين 1:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. أكتب معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (zz') وتشمل النقطة $A(-1; 2; 1)$.

التمرين 2:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- أكتب معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (xx') ونصف قطر قاعدتها 5.

2- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) حيث: $A(-1; 3; 4)$ و $B(1; 2; 3)$

3- عين نقط تقاطع (AB) مع سطح الأسطوانة.

التمرين 3:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- أكتب معادلة سطح الأسطوانة (γ) ذات المحور (yy') وتشمل النقطة $C(-1; 1; 2)$.

2- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1; 1; -3)$

و الشعاعين $\vec{i}; \vec{k}$. 3- عين نقط تقاطع (P) و (γ) .

التمرين 4:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

أكتب معادلة للسطح المخروطي الذي رأسه O ومحوره $(o; \vec{j})$ ويشمل $A(2; -1; 1)$ نقطة من الفضاء.

التمرين 5:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

أكتب معادلة للسطح المخروطي الذي رأسه O ومحوره $(o; \vec{i})$ وزاوية رأسه $\frac{\pi}{3}$.

التمرين 6:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- أكتب معادلة للسطح المخروطي الدوراني (S) الذي رأسه O ومحوره $(o; \vec{k})$ وزاوية رأسه $\frac{\pi}{4}$.

2- أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1; -2; 1)$

و الشعاعين $\vec{i}; \vec{j}$. 3- عين نقط تقاطع (S) والمستوي (P) .

التمرين 7:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

أكتب معادلة المخروط الذي رأسه M والمحيط بالكرة التي مركزها $\omega(0; 2; 0)$ ونصف قطرها 1.

التمرين 8:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- ليكن (S) سطح الكرة المعرفة بالعلاقة: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 = 0$

عين مركز ونصف قطر هذه الكرة (S) .

2- أكتب معادلة سطح الأسطوانة التي تحيط بالكرة (S) ومحورها $(o; \vec{i})$.

3- أكتب معادلة سطح المخروط المحيط بالكرة (S) ورأسه O ومحوره $(o; \vec{i})$.

التمرين 9 : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقطة

$$A(0; 0; 2) . \text{ أكتب معادلة المخروط الذي رأسه } A \text{ ونصف زاوية رأسه } \frac{\pi}{6} .$$

التمرين 10 : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(0; 0; 2)$ وشعاع توجيهه \vec{j}
- 2- أكتب معادلة الأسطوانة التي محورها (Δ) ونصف قطرها 1.

الحلول

التمرين 1 : معادلة سطح الأسطوانة : $x^2 + y^2 = \alpha^2$

وبما أن الأسطوانة تشمل $A(-1; 2; 1)$ فإن : $\alpha^2 = (-1)^2 + (2)^2 = 5$

وعليه : $\alpha^2 = 5$ إذن معادلة سطح الأسطوانة هي : $x^2 + y^2 = 5$

التمرين 2 : معادلة سطح الأسطوانة : $y^2 + z^2 = (5)^2$ أي $y^2 + z^2 = 25$

1- معادلة سطح الأسطوانة : $y^2 + z^2 = (5)^2$ أي $y^2 + z^2 = 25$

2- تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم (AB) :

تكون نقطة $M(x; y; z)$ من المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 3 \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} x + 1 = t(1 + 1) \\ y - 3 = t(2 - 3) \\ z - 4 = t(3 - 4) \end{cases}$$

وهو التمثيل الوسيط للمستقيم (AB) .

3- تعيين نقط تقاطع (AB) مع سطح الأسطوانة :

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 3 \\ z = -t + 4 \end{cases} \quad \text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} (-t + 3)^2 + (-t + 4)^2 = 25 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \quad \text{وعليه}$$

$$t^2 - 6t + 9 + t^2 - 8t + 16 = 25 \quad \text{ومنه}$$

$$2t^2 - 14t + 25 = 25$$

$$\text{إذن } 2t^2 - 14t = 0 \quad \text{ومنه} \quad 2t(t - 7) = 0 \quad \text{إما } t = 0 \text{ أو } t = 7$$

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = -4 \\ z = -3 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

ومنه المستقيم (AB) يقطع السطح الأسطوانة في النقطتين $A(-1; 3; 4)$ و $C(13; -4; -3)$.

التمرين 3 : معادلة السطح الأسطوانة : $(\gamma) : x^2 + z^2 = \alpha^2$

وبما أن $C \in (\gamma)$ فإن $(-1)^2 + (4)^2 = \alpha^2$ ومنه $\alpha^2 = 17$

وعليه $\alpha = \sqrt{17}$ إذن $(\gamma) : x^2 + z^2 = 17$

2- التمثيل الوسيط للمستوي (P) :

تكون نقطة $M(x; y; z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{BA} = t\vec{i} + t'\vec{k}$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t' - 3 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \begin{cases} x - 1 = t(1) + t'(0) \\ y - 1 = t(0) + t'(0) \\ z + 3 = t(0) + t'(1) \end{cases}$$

3- تعيين نقط تقاطع (γ) و (P) :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 17 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t' - 3 \\ x^2 + z^2 = 17 \end{cases} \quad \text{فنجد}$$

إذن P تقطع الأسطوانة (γ) وفق الدائرة ذات المركز $\omega(0; 1; 0)$ ونصف القطر $\sqrt{17}$

التمرين 4 : معادلة السطح المخروطي $x^2 + z^2 - y^2 \tan^2 \theta = 0$ بما أن A نقطة من المخروط

$$5 - \tan^2 \theta = 0 \quad \text{فإن} \quad (2)^2 + (1)^2 - (-1)^2 \tan^2 \theta = 0 \quad \text{وعليه}$$

ومنه : $\tan^2 \theta = 5$ وعليه معادلة المخروط : $x^2 + z^2 - 5y^2 = 0$

التمرين 5 :

معادلة المخروط : $y^2 + z^2 - x^2 \tan^2 \theta = 0$

وعليه نصف زاوية الرأس هي $\frac{\pi}{6}$ أي $\theta = \frac{\pi}{6}$ ومنه $y^2 + z^2 - x^2 \tan^2 \frac{\pi}{6} = 0$

ومنه معادلة المخروط هي $y^2 + z^2 - \frac{1}{3}x^2 = 0$ لأن $\tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$

التمرين 6 :

1- معادلة السطح المخروطي : $x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \theta = 0$

وبالتالي $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0$ إن $x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \frac{1}{4} = 0$

2- التمثيل الوسيط للمستوي $(A; \vec{i}, \vec{j})$

تكون نقطة $M(x; y; z)$ من هذا المستوي إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM} = t\vec{i} + t'\vec{j}$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t' - 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{وبالتالي} \quad \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 2 = t' \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{وعليه}$$

3- تعيين نقط التقاطع :

$$\text{نحل الجملة} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t' - 2 \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad \text{إن}$$

ومنه يتقاطع المخروط و الأسطوانة وفق الدائرة المعرفة أعلاه . أي الدائرة ذات المركز

$$\omega(0; 0; 1) \quad \text{ونصف القطر} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

التمرين 7 :

معادلة المخروط هي $x^2 + z^2 - y^2 \tan^2 \theta = 0$

لدينا $\tan \theta = \frac{\omega p}{op}$ حيث $o\omega = 1$ ، $op = 1$

ولدينا $o\omega^2 = op^2 + p\omega^2 = (2)^2 - (1)^2$ ومنه $o\omega^2 = 3$

إن $op^2 = 3$ وعليه $op = \sqrt{3}$ إن $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

وعليه معادلة المخروط تصبح $x^2 + z^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 y^2 = 0$

$$x^2 + z^2 - \frac{1}{3}y^2 = 0 \quad \text{أي}$$

التمرين 8 :

1- تعيين المركز ونصف القطر للكرة (S) :

لدينا : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 = 0$

ومنه : $(x-3)^2 - 9 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ وعليه : $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$

إن مركز الكرة هي النقطة $A(3; 0; 0)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- تعيين معادلة سطح الأسطوانة المحيطة بهذه الكرة :

محور الأسطوانة المحيطة بالكرة هو $(o; \vec{i})$ ونصف قطر قاعدة الاسطوانة

هو 2 فتكون معادلة الأسطوانة كما يلي : $y^2 + z^2 = 4$

3- معادلة المخروط :

محور المخروط هو $(o; \vec{i})$ وعليه تكون معادلته من الشكل $y^2 + z^2 - x^2 \tan^2 \theta = 0$

لدينا : $\tan \theta = \frac{AP}{OP}$ حيث $AP = 2$ ، $OA = 3$

ولدينا في المثلث OAP القائم في P : $OA^2 = OP^2 + AP^2$


وعليه $OP^2 = OA^2 - AP^2$ أي $OP^2 = 9 - 4 = 5$ ومنه $OP = \sqrt{5}$


إن $\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ أي $\tan^2 \theta = \frac{4}{5}$

ومنه معادلة المخروط تصبح $y^2 + z^2 - \frac{4}{5}x^2 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$: نعلم أن :

كيف يمكن تخمين هذه النتيجة باستعمال آلة بيانية
الحل :


(1) ننقر على الزر :  ونكتب عبارة الدالة كمايلي :

(2) ننقر على الزر  وندخل الأرقام الآتية :
إن قيم x محصورة بين 2.9 و 3.1 لأن x يتناهي
نحو 3 أما قيم $f(x)$ فهي محصورة بين $f(2.9)$
و $f(3.1)$ أي بين -37.9 و -11.8

(3) ننقر على الزر 

ثم نختار ZoomFit
كما يظهر على الشاشة

4) ننقر علی  فنحصل علی التمثیل البینانی للمقابل :

(5) ننقر على  ونقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال الزلقة حتى نحصل على النقطة ذات الفاصلة 3.0021277 ونجد $f(3.0021277) = -30580.5$ وهذا يدل على أن المخمنة التالية صحيحة $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

التمرين 9 :

لنفرض ان $M(x; y; z)$ في المعلم $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ نفرض ان $M(x'; y'; z')$ في المعلم $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - 2 \end{array} \right. \quad \text{أي} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = 2 + z' \end{array} \right. \quad \text{فنجد}$$

معادلة المخروط في المعلم $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي $x'^2 + y'^2 - z'^2 \tan^2 \frac{\pi}{6} = 0$

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{3}(z-2)^2 = 0 \quad \text{أي} \quad x^2 + y^2 - (z-2)^2 \times \frac{1}{3} = 0 \quad \text{وعليه}$$

التمرين 10 :

1- التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) :

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء. تكون M نقطة من (Δ) إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2 \end{cases} \quad \text{این} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z-2=0 \end{cases} \quad \text{و عليه} \quad \overline{AM} = t \vec{j}$$

وهو التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) .

2- معادلة الأسطوانة :

نقوم بتغيير المعلم : لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الأسطوانة في المعلم $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ونفرض ان $M(x'; y'; z')$ في المعظم $(A; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$

$$\begin{cases} x = 0 + x' \\ y = 0 + y' \\ z = 2 + z' \end{cases} \quad \text{وعليه} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad \text{لدينا}$$

معادلة الأسطوانة في المعلم $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي $x^2 + z^2 = (1)^2$

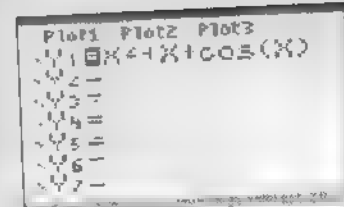
وعليه $x^2 + (z-2)^2 = 1$ وهي معادلة الأسطوانة في المعظم $(o; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

التطبيق 2: باستعمال آلة بيانية ماهو تخمينك حول :

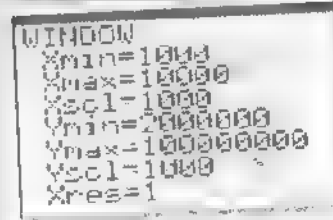
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \cos x = +\infty$$

الحل :

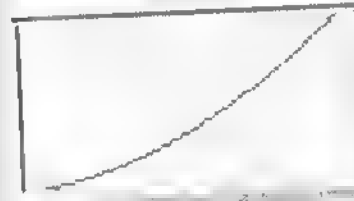
(1) ننقر على الزر : ونكتب عبارة الدالة كمايلي :



(2) ننقر على الزر : وندخل القيم التالية كما يظهر على الشاشة :



(3) ننقر على الزر : فظهر التمثيل البياني



(4) ننقر على الزر : ثم نحرك نقطة من البيان فنجد : $f(10000) = 100009999$ وبالتالي المخمنة التالية صحيحة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \cos x = +\infty$$

التطبيق 3

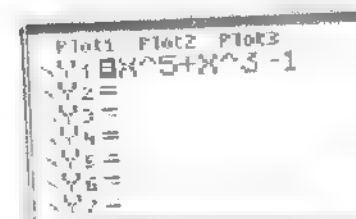
بين أن المعادلة : $x^5 + x^3 - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;1[$ حيث يطلب

إعطاء حصرا للحل بتقريب 10^{-3} .

الحل :

(1) ننقر على الزر : ونكتب عبارة الدالة f المعرفة

$$f(x) = x^5 + x^3 - 1$$



(2) ننقر على الزر : وندخل الأرقام الآتية

(3) ننقر على الزر : فظهر التمثيل البياني الآتي :

(4) نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال

الزر : إلى أن تتغير إشارة $f(x)$

فمن أجل : $x = 0.82978723$ نجد

$$f(x) = -0.0352532$$

ومن أجل $x = 0.84042553$ نجد

$$f(x) = 0.01287754$$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد x_0 يحقق :

$$0.829 < x_0 < 0.840$$

التطبيق 4

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

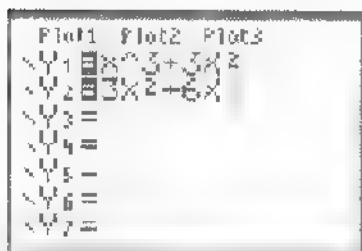
تحقق باستعمال آلة بيانية التوافق بين اتجاه تغير الدالة f وإشارة المشتقة f'

الحل :

(1) ننقر على الزر : ونكتب عبارة الدالة f في y_1

وعبارة الدالة المشتقة f'

في y_2 كمايلي :



```

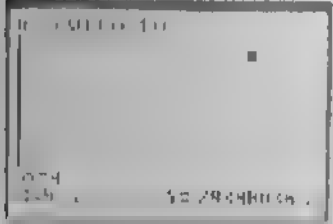
WINDOW
XMin=0
XMax=5
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=5
Xsc1=1
YMin=0
Ymax=1
Ysc1=1

```

(3) ننقر على  وندخل الأرقام التالية :



(4) ننقر على الزر  فنحصل على النقط التالية :



(5) ننقر على الزر  ونحرك زر الاتجاهات

لنحصل على حدود المتتالية

التطبيق 6 :

أنشئ التمثيل البياني (c) للدالة f حيث :

$$f(x) = x + 1 + e^x \text{ باستعمال آلة بيانية.}$$

أحسب العدد المشتق للدالة f عند العدد 0

أنشئ المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 0

الحل

(1) ننقر على الزر  :

ونكتب عبارة الدالة f المعرفة

كمايلي :

$$f(x) = x + 1 + e^x$$

```


Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X+1+e^(X)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=

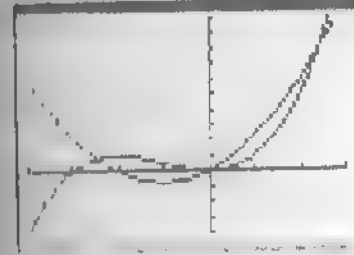
```

```

WINDOW
XMin=-4
XMax=3
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=-16
Xmax=40
Xsc1=4
Xsc2=-1

```

(2) ننقر على  وندخل المعلومات التالية كما يظهر على الشاشة :



(3) ننقر على  :

فنحصل التمثيل البياني كما يظهر على الشاشة

(4) يمكن تحريك نقطة

من البيان لنلاحظ أنه كلما

$$\text{كانت } f'(x) > 0$$

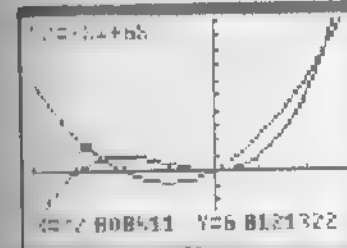
كانت الدالة f متزايدة تماما

فمثلا من أجل

$$x = -2.808511$$

$$f'(x) = 6.8121322$$

وعليه : $f'(x) > 0$



التطبيق 5 :

أنشئ باستعمال آلة بيانية للحدود الخمسة الأولى للمتتالية (U_n) حيث :

$$U_0 = 1 \text{ و } U_n = \cos(U_{n-1})$$

الحل :

ننقر على الزر  :

ونحول عمل الآلة إلى المتتاليات : Seq

```

Normal Sci Eng
Mode 0123456789
Angle Degree
Format Pol Rect
Display Dot
Horizontal Simul
G+G+ negG
Horiz G-T

```

(2) نقوم بإدخال المتتالية باستعمال

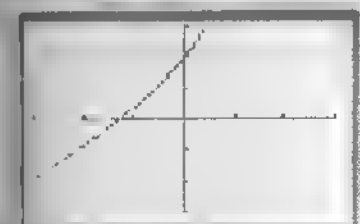
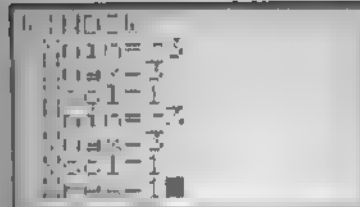
الزر  كمايلي:

```

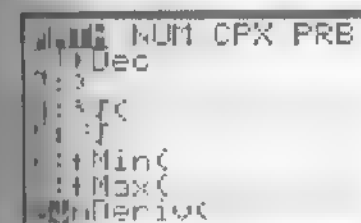
Plot1 Plot2 Plot3
U1=cos(u(x-1))
u(xMin)=1
u(x)=
u(xMin)=
u(x)=

```

(2) ننقر على **WINDOW** ونعطي القيم للمتغير x بين 3 و -3 وقيمة للمتغير y بين 3 و -3



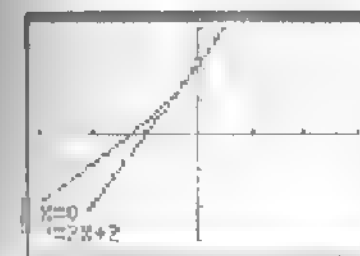
(3) ننقر على الزر **GRAPH** فنحصل على (c).



(4) حساب العدد المشتق للدالة f عند العدد 0
ننقر على الزر **2ND** وننقر على الرقم 8 لنختار n Deriv(



ونكتب عبارة الدالة والمتغير والقيمة 0 كما يظهر على الشاشة ثم ننقر على Enter فنحصل على العدد 0 وهو العدد المشتق للدالة f عند 0 إذن $f'(0) = 2$



(5) إنشاء المماس :
ننقر على **2ND** وننقر على الرقم 5 فنحصل على \tan gent(ونكتب عبارة الدالة وفاصلة النقطة ونصادق باللمسة Enter مرتين .
فنحصل على المماس كما يظهر على الشكل.

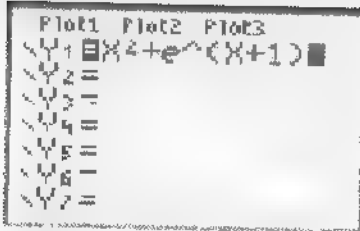
التطبيق 7 :
انشئ بالة بيانية التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = x^2 + e^{x+1}$$

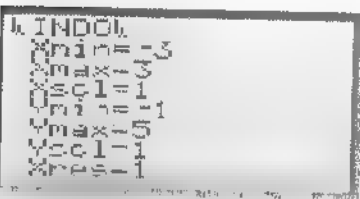
أحسب التكامل الآتي : $\int_{-1}^0 f(x) dx$

الحل :

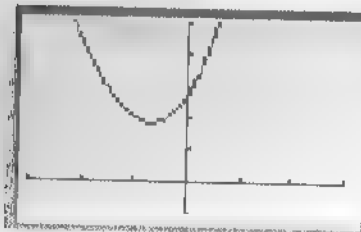
(1) ننقر على الزر **Y=** ونكتب عبارة الدالة f في Y_1 كمايلي :
 $Y_1 = x^2 + e^{x+1}$



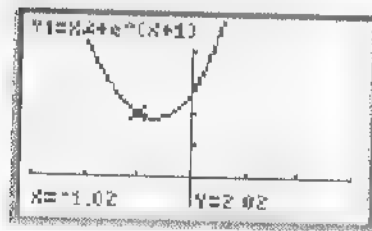
(2) ننقر على الللمسة **2ND** وندخل الأرقام التالية



(3) ننقر على الزر **GRAPH** فنحصل على (c)

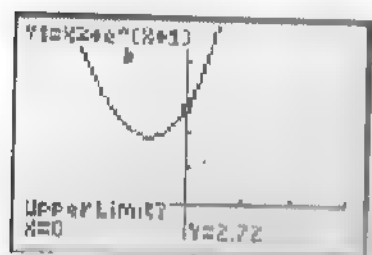


(4) ننقر على الزر **2ND** ونحرك زر الإجهادات لتحريك نقطة من (C) حتى نحصل على النقطة ذات الفاصلة $x = -1$



(5) ننقر على الللمسة **2ND** ثم على الللمسة **7**

ثم ننقر على العدد 7 ثم نصادق باللمسة Enter



```
real((5+2i)/(1-3i))
1.10
```

ندخل العبارة : $\text{real}((5+2i)/(1-3i))$
 ننقر على Enter فنجد : 0,10

3) تعيين الجزء التخيلي :
 ننقر على اللمسة **MATH** ونحرك الزايفة
 الى CPX ثم على الرقم 3
 فتظهر على الشاشة العبارة :

$\text{Imag}((5+2i)/(1-3i))$
 ندخل العبارة : $\text{Imag}((5+2i)/(1-3i))$
 ننقر على Enter فنجد : 1,70

```
imag((5+2i)/(1-3i))
1.70
```

4) ننقر على اللمسة **MATH**
 ونحرك الزايفة الى CPX ثم
 على الرقم 5 فتظهر على الشاشة العبارة :
 $\text{abs}((5+2i)/(1-3i))$
 ندخل العبارة : $\text{abs}((5+2i)/(1-3i))$
 ننقر على Enter فنجد : 1,70

```
angle((5+2i)/(1-3i))
1.63
```

5) ننقر على اللمسة **MATH**
 ونحرك الزايفة الى CPX ثم
 على الرقم 4 فتظهر على الشاشة العبارة :
 $\text{angle}((5+2i)/(1-3i))$
 ندخل العبارة : $\text{angle}((5+2i)/(1-3i))$
 ننقر على Enter فنجد : 1,63

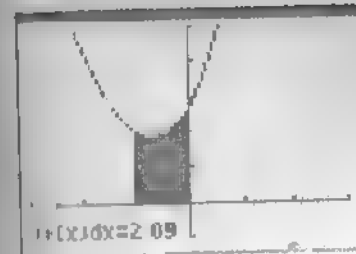
```
(5+2i)/(1-3i)
```

6) كتابة Z على الشكل الجبري :
 نكتب على الشاشة عبارة Z كمايلي :
 $(5+2i)/(1-3i)$

```
((5+2i)/(1-3i))>Rect
-0.10+1.70i
```

ننقر على اللمسة **MATH**
 ونحرك الزايفة الى CPX
 ثم ننقر على الرقم 6 و ننقر على Enter
 فتظهر على الشاشة العبارة :
 $-0,1+1,7i$

6) كتابة Z على الشكل الأسّي :
 نكتب على الشاشة عبارة Z كمايلي :
 $(5+2i)/(1-3i)$



6) نقوم بتحريك نقطة من (C) بواسطة زر
 الاتجاهات حتى نحصل على النقطة
 ذات الفاصلة $x = 0$ ثم نصادق باللمسة Enter

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = 2,09$$

التطبيق 8

نعتبر العدد المركب $z = \frac{5+2i}{1-3i}$
 باستعمال آلة بيانية :

- 1) عين مرافق العدد z . 2) عين الجزء الحقيقي للعدد z
- 3) عين الجزء التخيلي للعدد z 4) عين طويلة العدد z
- 5) عين عمدة العدد z 6) أكتب العدد z على الشكل الجبري.
- 7) أكتب العدد z على الشكل الأسّي.

```
MATH NUM CPX PRB
1: Frac
2: Dec
3: %
4: <
5: >
6: Min
7: Max
```

```
MATH NUM CPX PRB
1: Conj
2: real
3: imag
4: angle
5: abs
6: Rect
7: Polar
```

```
conj((5+2i)/(1-3i))
-0.10-1.70i
```

الحل

1) تعيين المرافق **MATH**
 ننقر على اللمسة

ونحرك الزايفة الى CPX
 كمايظهر على الشاشة فتظهر
 قائمة كما في الشاشة الموالية.
 نختار الرقم 1 لنحصل على :

$1:\text{Conj}()$

نكتب عبارة z كمايلي :

$\text{Conj}((5+2i)/(1-3i))$

وننقر على Enter

ف نحصل على النتيجة

$-0,10-1,70i$

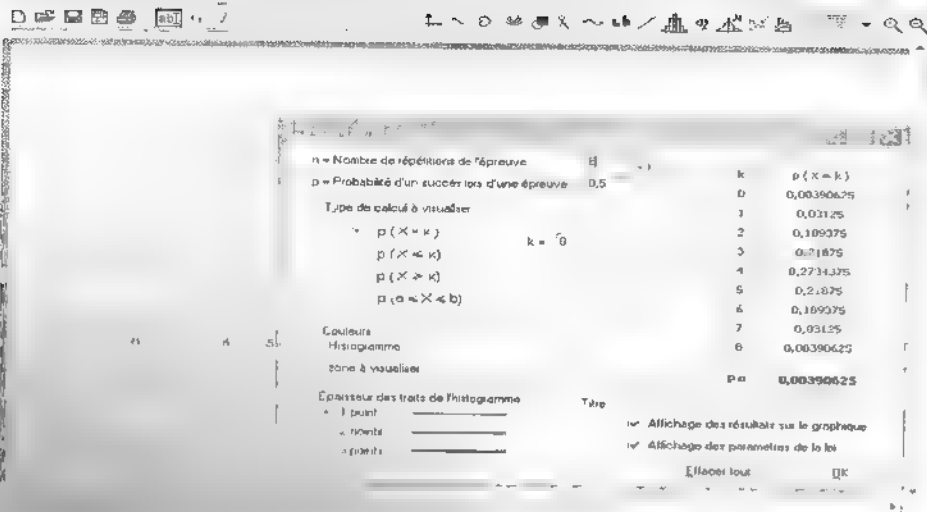
والتي تمثل مرافق z

2) تعيين الجزء الحقيقي :

ننقر على اللمسة **MATH**

ونحرك الزايفة الى CPX ثم على الرقم 2

فتظهر على الشاشة العبارة : $\text{real}((5+2i)/(1-3i))$



ننقر على اللمسة **MATH** ونحرك الزاوية الى CPX
 ثم ننقر على الرقم 7 و ننقر على Enter
 فنظهر على الشاشة العبارة :

$1,7e^{1,63i}$
 ملاحظة 1 :

لكتابة الحرف **i** نقوم بملألي :
 ننقر على اللمسة **2nd** ثم على اللمسة **i**
 ملاحظة 2 :

لتغيير عدد الأرقام بعد الفاصلة ننقر
 على اللمسة **2nd**

ونحدد عدد الأرقام بعد الفاصلة باستعمال الزاوية
 وهذا في السطر الثاني ثم ننقر على Enter
 وقد اخترنا في الشكل ثلاثة أرقام بعد الفاصلة .

التطبيق 9:

لدينا قطعة نقدية متوازنة تحمل الحرف F في وجه والحرف P في الوجه الآخر .

يقوم لاعب بإلقاء القطعة النقدية 10 مرات متتالية . ويكون رابحا 100 دينار كلما ظهر
 الوجه F .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعد عدد الحالات التي يظهر فيها F

إن X يتبع القانون الثنائي P_X ذو الوسيطين 10 و 0,5 . باستعمال البرمجية Sine qua

non مثل بيانها القانون P_X .

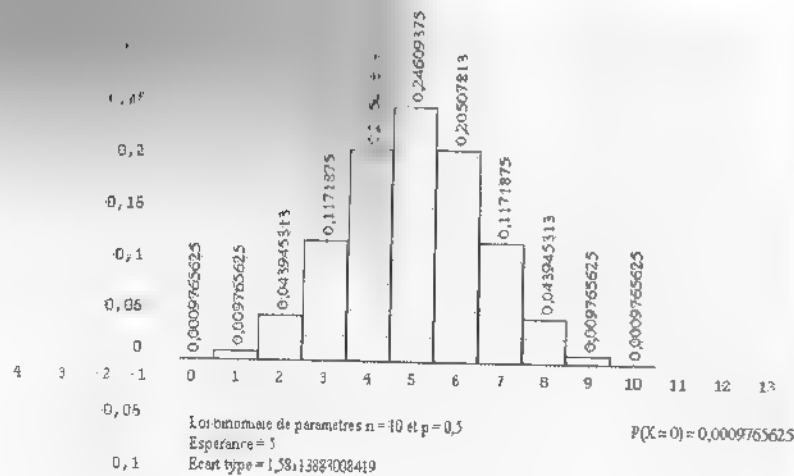
الحل :

نقوم بفتح المبرمج Sine qua non - ننقر على Definir

- نختار : Loi binomiale - نعطي القيمة 10 للوسيط n والقيمة 0,5 للوسيط p

- نظهر النافذة الموالية التي تعطي قيم $P(X = K)$ من أجل $0 \leq K \leq 10$ نختار منها

سمك الخط ثم ننقر على OK فيظهر التمثيل البياني للقانون الثنائي.



أنشئ تمثيلا تقريبا لحل المعادلة التفاضلية $y' = y$ و $y(0) = 1$ باستعمال طريقة Euler بمجدول Excel في المجال $[-3;3]$ والخطوة $h = 0.005$.

الحل : لدينا: $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ ومنه $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ أو

$$f(x-h) - f(x) \approx -f'(x) \cdot h \text{ مع } h > 0$$

وبما أن $y' = y$ فإن $f(x) = f'(x)$ فنحصل على $f(x+h) \approx f(x) \cdot (1+h)$ أو $f(x-h) \approx f(x) \cdot (1-h)$.

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h) \approx f(x) \cdot (1+h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x > 0$

وتعطي العبارة الثانية $f(x-h) \approx f(x) \cdot (1-h)$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $x < 0$

وذلك باعتبار $f(0) = 1$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا. نستخدم مجدول Excel لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل.

حجز الأعداد: نحجز الخطوة h في الخانة A3 مثلا.

على الجزء $[-3;0]$

نحجز في الخانة A4 قيمة ابتدائية للمتغير وهي 0

نحجز في الخانة A5 القاعدة $x - h = x$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي

قيم 0 بخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد -3

فنحجز: $A4 - A\$3 = A4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود A إلى

غاية الحصول على القيمة 3 أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة B4 العدد 1 وهو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0) = 1$

نحجز في الخانة B5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x-h)$ ولدينا

$$f(x-h) \approx f(x) \cdot (1-h) \text{ فنحجز : } B4 * (1 - A\$3) = B4$$

الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A

على الجزء $[0;3]$

نحجز في الخانة C4 قيمة ابتدائية للمتغير وهي 0

نحجز في الخانة C5 القاعدة $x + h = x$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي

بخطوة 0 إضافة الخطوة في كل مرة حتى الحصول على العدد 3

فنحجز: $C4 + A\$3 = C4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى

غاية الحصول على القيمة 3 أو أقرب قيمة لها.

نحجز في الخانة D4 العدد 1 وهو قيمة الدالة من أجل 0 لأن $f(0) = 1$

نحجز في الخانة D5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x+h)$ ولدينا

$$f(x+h) \approx f(x) \cdot (1+h) \text{ فنحجز : } D4 * (1 + A\$3) = D4$$

الخانات من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B

التمثيل البياني: نختار العمودين A و B نضغط على المساعد البياني



ونختار ☐ Nuages de points ثم المنحني من النوع

، نواصل العملية

بالضغط على ثم اختيار السلسلة بالضغط على

نجد السلسلة الأولى

التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول

$[-3;0]$ محجوزة باسم . ثم نضغط على لإضافة السلسلة الثانية التي

تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[0;3]$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط

بالفأرة من القيمة الأولى في C4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط

بالفأرة من القيمة الأولى في D4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين

حيث يشكلان منحنى الدالة (الحل) على المجال $[-3;3]$ ،

ثم الإنهاء

نستخدم جدول Excel لمقارنة التمثيل البياني للدالة الحل .

حجز الأعداد: نحجز الخطوة h في الخانة A3 مثلا.

من أجل $0 < X \leq 1$

نحجز في الخانة A4 قيمة ابتدائية للمتغير وهي 1

نحجز في الخانة A5 القاعدة $x - h = x$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي

قبل 1 بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على قيمة قريبة من

0 فنحجز: A\$3 - A4 = ثم نعم على باقي الخانات من عمود A إلى

غاية الحصول على قيمة قريبة من 0 .

نحجز في الخانة B4 العدد 0 وهو قيمة الدالة من أجل 1 لأن $f(1) = 0$

نحجز في الخانة B5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x - h)$

ولدينا $f(x - h) \approx f(x) - f'(x) \cdot h$ فنحجز : B4 - \$A\$3 / A4 = ثم نعم على

باقي الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A

من أجل $X \geq 1$

نحجز في الخانة C4 قيمة ابتدائية للمتغير وهي 1

نحجز في الخانة C5 القاعدة $x + h = x$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي

بعد 1 بإضافة الخطوة في كل مرة فنحجز: C4 + A\$3 = ثم نعم على باقي

الخانات من عمود C إلى غاية آخر قيمة للمتغير من العمود B

نحجز في الخانة D4 العدد 0 وهو قيمة الدالة من أجل 1 لأن $f(1) = 0$

نحجز في الخانة D5 القيمة التقريبية للعدد $y = f(x + h)$ ولدينا

$f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$ فنحجز D4 + \$A\$3 / C4 = ثم نعم على باقي الخانات

من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B.

التمثيل البياني:

نختار العمودين A و B نضغط على المساعد البياني

ونختار  ثم المنحنى من النوع  ، نواصل العملية

بالضغط على  ثم اختيار السلسلة بالضغط على

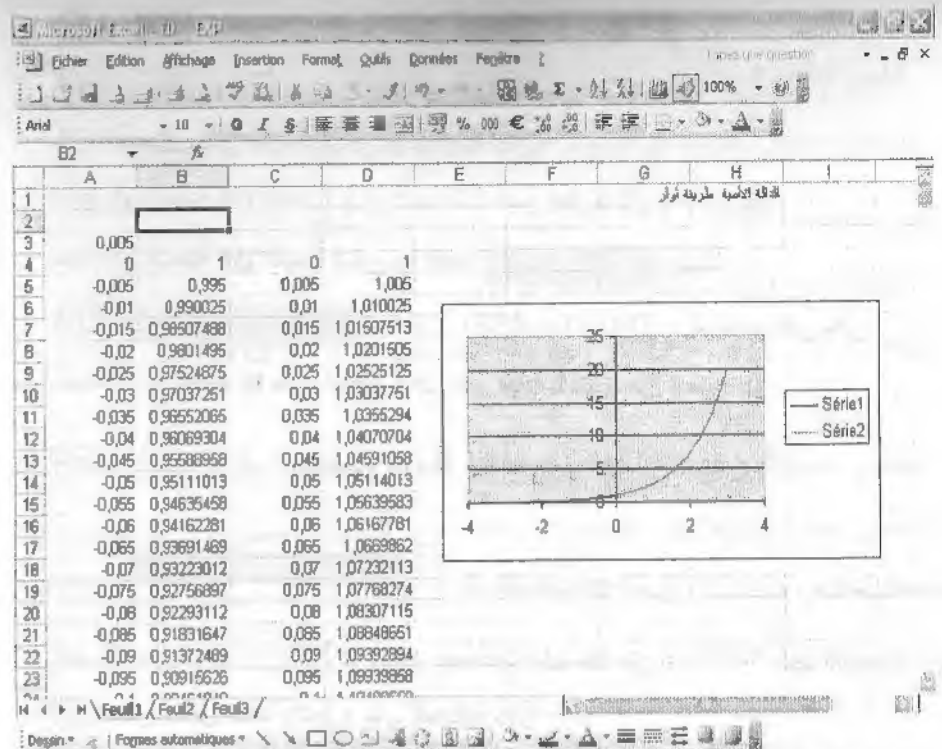
Série

نجد السلسلة الأولى

التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $[0, 1]$ محجوزة باسم  . ثم نضغط

على  لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال

الثاني $[1, b]$ كما يلي:



NUM

التطبيق 11:

أنشئ تمثيلا تقريبا لحل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{1}{x}$ مع الشرط $y(1) = 0$ باستعمال

طريقة Euler بمجدول Excel في المجال $[0; b]$ والخطوة $h = 0.005$.

الحل

لدينا: $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ ومنه $f(x + h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$ أو

$f(x - h) - f(x) \approx -f'(x) \cdot h$ مع $h > 0$

أو $f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$ أو $f(x - h) \approx f(x) - f'(x) \cdot h$

وبما أن $y' = \frac{1}{x}$ فإن $f'(x) = \frac{1}{x}$ فنحصل على $f(x - h) \approx f(x) - \frac{h}{x}$

أو $f(x + h) \approx f(x) + \frac{h}{x}$

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x + h) \approx f(x) + \frac{h}{x}$ قيم الدالة (الحل) من أجل $x \geq 1$ وتعطي

العبارة الثانية $f(x - h) \approx f(x) - \frac{h}{x}$ قيم الدالة (الحل) من أجل القيم $0 < x \leq 1$

وذلك باعتبار $f(1) = 0$ في الانطلاقة وجعل h صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا.

الفهرس

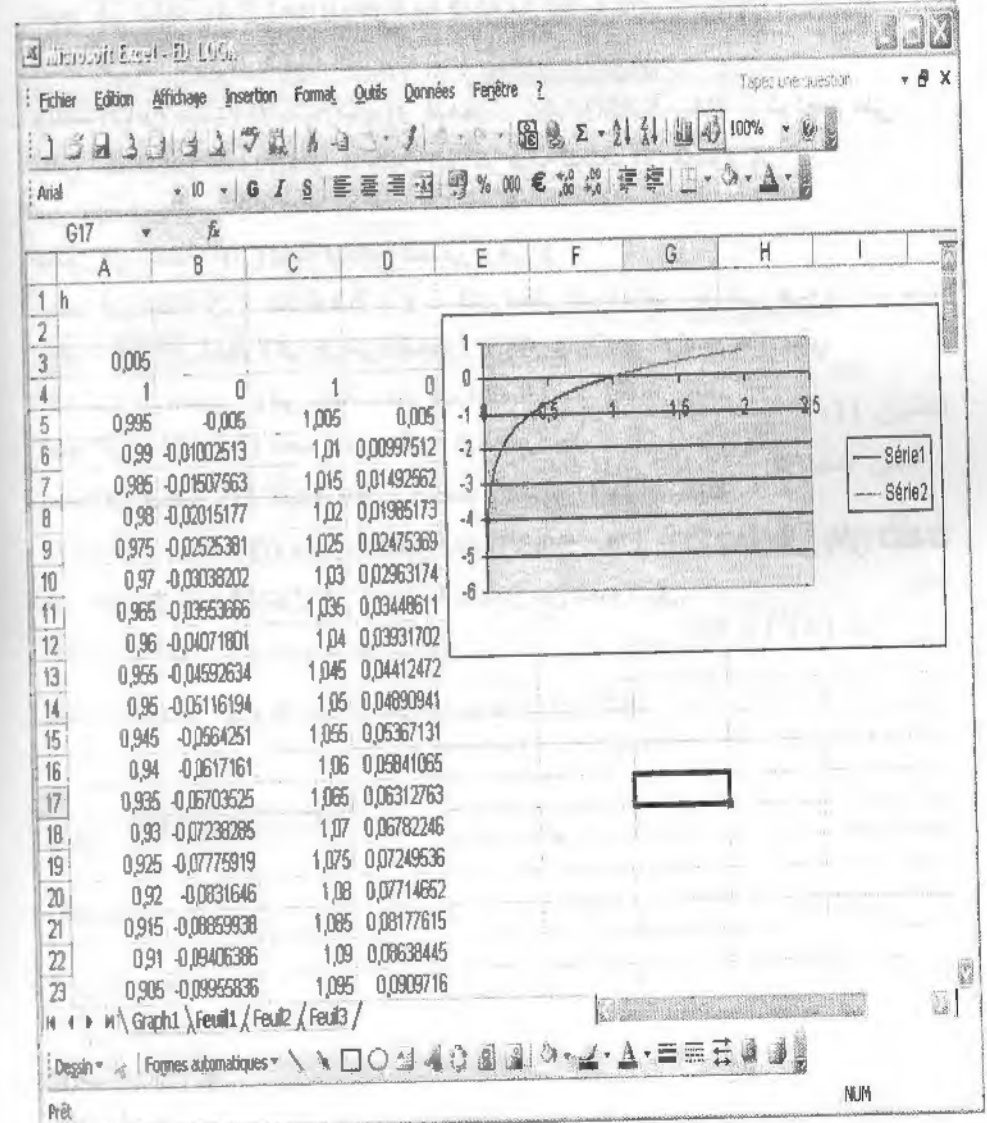
الرقم	عنوان الدرس	الصفحة
1	النهايات	4
2	الإستمرارية	34
3	الإشتقاقية	58
4	الدول الأصلية	116
5	الدالة الأسية	136
6	الدالة اللوغارتمية	174
7	الدالة الأسية ذات الأساس a	235
8	المتتاليات والتراجع	255
9	الحساب التكاملي	280
10	الإحتمالات	319

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في C4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في D4 إلى آخر قيمة من نفس العمود.

نضغط بعدها على التالي Suivant > فيظهر المنحنيان مكملا لبعضهما بلونين مختلفين، حيث

يشكلان منحنى الدالة (الحل) على المجال $[0, b]$ ، ثم الإنهاء Terminer



358	الأعداد المركبة	11
394	التشابه المستوي المباشر	12
414	الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته	13
427	المستقيمات والمستويات في الفضاء	14
441	قابلية القسمة في \mathbb{Z}	15
449	الموافقات في \mathbb{Z} و التعداد	16
463	الأعداد الأولية	17
476	المقاطع المستوية للسطوح	18
487	تكنولوجيا الإعلام والاتصال	19

تم طبع هذا الكتاب بمطبعة
دار الحديث للكتاب القبة - الجزائر -
الهاتف : 81 - 01 10 - 017

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير
و النجاح و الموفرة